

# L'aportació de Vicent Caselles al món de les matemàtiques i l'aplicació al processament d'imatges

P. ARIAS, C. BALLESTER, B. COLL, J. M. MAZÓN I E. PROVENZI

**Resum:** En aquest treball es fa un repàs de les contribucions més importants de Vicent Caselles al camp de les matemàtiques i la seva aplicació als models de les imatges. Les seves aportacions varen cobrir tot un ventall molt ample, des de la recerca més bàsica, com és el cas de la seva contribució a les EDP no lineals i a l'estudi analític del model de la variació total (TV), fins a les aplicacions al processament d'imatges. Les seccions corresponen, en certa manera, a les àrees en les quals va tenir una participació més significativa. Més concretament, en la part de recerca bàsica, les aportacions en l'estudi del funcional de la variació total, les equacions quasilineals fortament degenerades i les equacions amb flux limitat. I en la part de les aplicacions al camp del processament d'imatges, hem triat tres temes en els quals Caselles va contribuir de manera molt significativa: la detecció de contorns, el problema de la interpolació o *inpainting* i la formalització matemàtica de la teoria del color.

**Paraules clau:** anàlisi funcional, variació total, EDP no lineals, processament d'imatges, detecció de contorns, interpolació, teoria del color.

**Classificació MSC2010:** 68T99, 46Txx, 35K93.

## 1 Introducció per Coloma Ballester

Aquest treball pretén ser una aproximació a les aportacions més importants que ens va deixar Vicent Caselles en la seva excepcional obra científica matemàtica. L'obra de Caselles va ser immensa i les seves aportacions varen cobrir tot un ventall molt ample, des de la recerca més bàsica fins al món de les aplicacions en el camp del processament d'imatges. Com molt bé diu J. M. Mazón al final de la seva part dins aquest mateix treball, a la secció 2, Vicent Caselles tenia una cultura i una formació matemàtiques excepcionals; va ser una d'aquestes persones que deixen petjada, una capacitat de treball infinita, en part deguda al seu interès per qualsevol tema que se li pogués plantejar. Però, al mateix temps, era una persona molt humana i generosa, amb qui era agradable compartir punts de vista sobre temes humans i científics.

Des del punt de vista de la recerca bàsica i en la seva primera etapa, vegeu la secció 2, els seus esforços es varen dirigir cap a la teoria d'operadors positius en reticles de Banach i en les equacions en derivades parcials no lineals. Posteriorment, i motivat per les aplicacions al camp de la restauració d'imatges, ens va endinsar, juntament amb F. Andreu i J. M. Mazón, en l'estudi analític sobre el funcional de la variació total (TV). Les seves aportacions varen ser clau per entendre el comportament i les propietats del flux variació total. Dins la mateixa línia, els seus estudis en el camp de les equacions quasilineals fortament degenerades i en les equacions amb flux limitat varen ser molt importants per desencallar alguns problemes clàssics en aquest camp.

D'altra banda, els grans avenços en el camp nou del processament i de l'anàlisi matemàtica d'imatges no es poden entendre sense les aportacions de Caselles. Una imatge en escala de grisos  $f$  pot modelar-se com una funció escalar definida en un domini  $\mathcal{R}$  del pla euclidià,  $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ . En el cas d'una imatge en color, la funció  $f$  seria una funció definida en el domini  $\mathcal{R}$  del pla, que agafa els seus valors dins  $\mathbb{R}^3$ .

En l'aplicació de les matemàtiques al processament d'imatges, un dels primers problemes que va considerar Caselles va ser la detecció de contorns o corbes que separen regions homogènies d'una imatge; vegeu la secció 4. La seva solució, donada per una geodèsica en un espai de Riemann i la seva anàlisi matemàtica, va ser fonamental en el tractament del problema. Una altra aplicació al camp de les imatges en la qual va treballar va ser la interpolació d'imatges (problema de l'*inpainting*); vegeu la secció 3. En aquesta aplicació, es coneix el valor d'una imatge en un subconjunt del seu domini i llavors el problema és trobar una imatge definida en tot el domini i que coincideixi amb la donada dins el subconjunt original. Vicent Caselles pot ser considerat un dels fundadors d'aquest camp, al qual va contribuir en gran manera basant-se en la interpolació geomètrica i textural. Finalment, hem considerat l'aplicació a les imatges en color, a la qual Caselles va donar un impuls en la seva formalització matemàtica; vegeu la secció 5. En un primer treball, Caselles i Sapiro van utilitzar principis variacionals per fer una interpretació nova de l'equalització per histograma, que va ser utilitzada posteriorment per construir un marc variacional per al realçament del color inspirat en les propietats del sistema de la visió humana.



Dos moments importants en la vida acadèmica de Vicent Caselles.

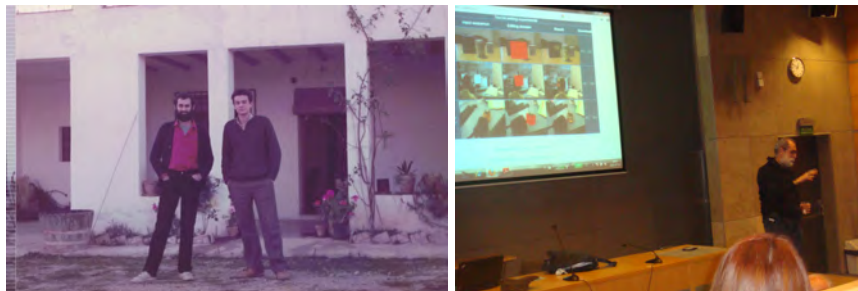
Esquerra: A la conferència convidada d'ICIAM.

Dreta: Caselles, amb Mazón i Andreu, rep el prestigiós Premi Ferran Sunyer i Balaguer.

## 1.1 Ressenya biogràfica

Vicent Caselles Costa va néixer l'agost del 1960 a Gata, poble de la comarca de la Marina Alta, al País Valencià, ben a la vora del Montgó, la muntanya mítica que domina la comarca i la seva mar i per a la qual Vicent tenia tant d'apreci. El seu pare treballava al camp i la seva mare regentava una tenda familiar de queviures i articles diversos en la qual es podia trobar des de moixama i altres saladures de peix fins a mitjons. En la seva infància i joventut feia tot el que estava a les seves mans per aconseguir bona literatura i bibliografia especialitzada, tot i les dificultats de l'Espanya d'aquella època. Va treballar al camp i a la cooperativa de Gata als estius per pagar-se els estudis i els llibres. Va acabar la llicenciatura de matemàtiques a la Universitat de València i, posteriorment, el 1985, el doctorat; va obtenir tant el Premi Extraordinari Fi de Carrera com el de doctorat. Va continuar estudiant en diverses universitats europees: a Alemanya, al Mathematisches Institut der Universität Tübingen, i a França, a l'Université de Franche-Comté (Besançon) i a l'Université Paris-Dauphine. Caselles va ocupar places en les universitats de València, Franche-Comté, Illes Balears i Pompeu Fabra, on era catedràtic de matemàtica aplicada, i va fer estades de diversa duració en diversos centres com UCLA (EUA), l'Université Paris-Dauphine, l'École Normale Supérieure Paris-Saclay (abans ENS Cachan), l'Institut Henri Poincaré, l'Université Paris-VI (totes a França) i l'Universität Tübingen (Alemanya). En paral·lel a la seva activitat investigadora i docent a la UPF, Caselles va ser director científic del Grup d'Imatge i Gràfics del Centre Tecnològic Barcelona Media (ara dins Eurecat), des d'on, en relació estreta amb el sector empresarial, va desenvolupar noves aplicacions del processament d'imatges a diversos sectors industrials com ara la televisió o el cinema digitals. Amb tres llibres publicats, més de dos-cents articles d'investigació, dues patents, la direcció de disset tesis doctorals i l'edició de revistes de prestigi i referència internacional, els treballs de Vicent Caselles han tingut una influència considerable i li han donat un reconeixement internacional. Prova d'això és que va ser conferenciant convidat en congressos com l'International Congress of Mathematicians el 2006, l'International Congress on Industrial and Applied Mathematics el 2011 i el 6è European Congress of Mathematics el 2012. Caselles va rebre nombrosos reconeixements a la seva activitat. A escala nacional, cal destacar la Distinció de la Generalitat de Catalunya per a la Investigació 2002; el Premi Ferran Sunyer i Balaguer 2003; la distinció ICREA Academia 2009. A escala internacional, podem destacar el SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics) Outstanding Paper Prize 2008 (per l'aportació del fonament teòric del mètode proposat per Rudin, Osher i Fatemi, detallat en la subsecció 2.2); el Test of Time Award de la International Conference on Computer Vision el 2011 (pel treball «Geodesic active contours» detallat en la secció 4; el guardó reconeix les aportacions rellevants que han tingut impacte al llarg del temps en l'àmbit de visió per ordinador); el SIAM Activity Group on Imaging Science prize el 2012 (per l'article a IEEE-PAMI «A perceptually inspired variational framework for color enhancement» detallat en la secció 5), i l'Advanced Grant

de l'European Research Council a finals del 2012, per desenvolupar un projecte d'investigació que no va poder acabar ja que va morir el 14 d'agost del 2013. D'altra banda, Vicent Caselles estava entusiàsticament implicat en la docència, a tots els nivells, tant en l'aprenentatge actiu i profund en els graus i altres titulacions, d'alguna de les quals en va liderar la creació, com en programes de doctorat i en els estudiants de doctorat.



Esquerra: El 1984 o 1985, amb Joan Bisquert a la caseta dels Miralbans.

Dreta: Al 6è European Congress of Mathematics a Cracòvia el 2012.

Com s'ha esmentat, l'obra científica matemàtica de Vicent Caselles és excepcional. La persona també ho era. El seu entusiasme, cultura i humanitat són qualitats de Caselles destacades pels que el coneixien. Per això acabarem aquesta breu ressenya biogràfica amb un text seu escrit a mà un dia que jugàvem a escriure biografies. Entre d'altres, li vaig demanar que escrivís sobre si mateix i va redactar el que segueix. M'ha semblat adequat i lleial amb qui era ell recuperar aquest text, transcrit sense cap modificació:

Vicent Caselles Costa va néixer a Gata el 10 d'agost de 1960. Malgrat que avui tot es troba cercant a internet, és acte protocolari fer-ne un sketch de la seva biografia. Vicent és professor de Matemàtica Aplicada a la Universitat Pompeu Fabra (Barcelona). Després de seguir l'escola a Gata fins als 10 anys, va seguir l'acadèmia de preparació del batxillerat lliure que hi havia a Gata, dels 11 als 13 anys. Dels 14 anys i fins quasi als 17 va cursar el batxillerat a l'Institut Roc Chabàs a Dènia. A l'octubre de 1977 va entrar a la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de València, on va seguir el primer curs de forma presencial. Per circumstàncies personals, els cursos segon, tercer i quart els va seguir des de la casa que tenia la família al carrer Signes 69, on ara viu el seu germà Juan Caselles Costa. Aquests varen ser anys de la màxima llibertat bàsicament dedicats a l'estudi i a passejos vespertins per la Font de la Mata (quin tresor) junt amb en Vicent Sabater, on vaig poder disfrutar de la lectura dels grans clàssics de les matemàtiques i de la física, gust que sempre m'ha acompanyat. El cinquè curs, el 1981-1982, va tornar a la universitat. Durant els tres anys següents, va cursar el doctorat, estudiant física al mateix temps. En aquests anys, vaig fer coneixença de Joan Bisquert, actualment un físic aplicat a la Universitat Jaume I

de Castelló, amb molta alta consideració. Durant els estius, jo treballava a la caseta dels Miralbans que mira al Montgó (quin tresor) i Joan venia també a estudiar allà. Ell ho comparava a l'església del Pare Pere. A l'acabar el doctorat, va passar dos anys a Tübingen (Alemanya), dos anys a Besançon (França), un any a Madrid (fent el servei militar), mig any a París, vuit anys a Palma, i, a partir del curs 1999–2000, a la Universitat Pompeu Fabra, essent a la vegada asidu visitant de París i Pisa. A la UPF ha treballat des de llavors. Actualment és també director de recerca del Grup d'Imatge de la Fundació Barcelona Media, on treballa en diversos projectes industrials amb empreses, entre elles amb Mediapro (que té, per exemple, La Sexta).

## **2 L'aportació de Vicent Caselles en la recerca bàsica de les matemàtiques**

**per José M. Mazón**

### **2.1 Introducció a l'obra de Vicent Caselles**

Voldria començar agraint a la Societat Catalana de Matemàtiques l'oportunitat que em brinda per escriure aquest article sobre una part de l'obra matemàtica de Vicent Caselles, aquella que és més propera als meus interessos investigadors, en una part de la qual vaig tenir el privilegi de col·laborar amb ell.

Un cop acabada la llicenciatura, Vicent Caselles va començar a fer la tesi doctoral sota la direcció d'Antonio Marquina. Va defensar la tesi, titulada «Sobre la teoria de Radon-Nikodym i Perron-Frobenius dels operadors positius» el 1985. Vaig tenir l'honor de formar part del tribunal que la va jutjar. Aquesta tesi s'emmarca en el camp de l'anàlisi funcional, més concretament en la teoria d'operadors positius en reticles de Banach. En aquest treball ja s'hi veu la profunditat dels raonaments matemàtics de Caselles. Finalitzada la tesi, Caselles va fer una estada postdoctoral de dos anys a la Universitat de Tübingen, on va seguir treballant, amb el grup del professor Schaefer, en la teoria d'operadors positius en reticles de Banach i la seva relació amb la geometria dels espais de Banach. Algunes de les seves contribucions a aquesta teoria estan recollides en les publicacions [49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 7].

El 1987 Caselles es va traslladar a Besançon, on va romandre tres anys. Aquí comença, sota la direcció del professor Philippe Bénilan, a treballar en el camp de les equacions en derivades parcials no lineals, camp que mai va abandonar encara que més tard es dedicués molt intensament a treballar en el processament d'imatges. En la seva etapa de Besançon obté resultats importants sobre equacions de primer ordre i la dualitat entre lleis escalars de conservació i les equacions de Hamilton-Jacobi [69, 56]. En aquesta primera etapa de canvi cap a les EDP no lineals Caselles no abandona la recerca en teoria espectral d'operadors positius. En aquest camp va dirigir la seva primera tesi doctoral, a Francesc Aràndiga, amb el qual va continuar treballant en aquest tema fins a 1994. Alguns dels seus resultats amb Aràndiga es troben a [19, 20].

El 1990 Caselles torna a Espanya, més concretament a la Universitat de les Illes Balears, on aviat va obtenir una plaça de professor titular i on va romandre nou anys. En el Departament de Matemàtiques i Informàtica, al qual es va incorporar, hi havia un petit grup de recerca en processament d'imatges, liderat pel professor francès Jean-Michel Morel. Caselles aviat va començar a treballar en aquest tema, hi va trobar el que estava buscant des de la seva època d'estudiant: un tema de gran profunditat matemàtica i amb aplicacions pràctiques importants. Des de llavors va dedicar els seus màxims esforços a treballar en aquest camp, on va arribar a ser un dels líders internacionals.

## 2.2 L'aportació de Vicent Caselles al model de la variació total (TV)

Els primers a introduir la variació total en models de restauració d'imatges van ser L. Rudin, S. Osher i E. Fatemi en el seu treball [98]. A la fi dels anys noranta hi havia una literatura extensa sobre mètodes numèrics i aplicacions al processament d'imatges dels nous models tractats a [98], però no hi havia cap resultat analític. Fuensanta Andreu i jo vam tenir el privilegi de treballar amb Caselles en el problema de la minimització de la variació total. La principal dificultat amb què ens vam trobar va ser fer una interpretació correcta de l'operador diferencial

$$\Delta_1 u := \operatorname{div} \left( \frac{Du}{\|Du\|} \right), \quad (1)$$

que apareix en l'equació d'Euler-Lagrange associada al funcional d'energia del model de L. Rudin, S. Osher i E. Fatemi. Després d'uns anys de treball, a [5], aconseguim donar un concepte adequat de solució del problema de Neumann associat a l'operador (1), per al qual provem l'existència i la unicitat de solucions, així com el comportament asimptòtic. A més, trobem solucions explícites que posen de manifest la dinàmica especial de les solucions d'aquest problema. Posteriorment, i motivats per un model interessant per al problema d'*inpainting* (reconstrucció d'una part d'una imatge), introduït a [24], estudiem el problema de Dirichlet associat a l'operador (1). Les propietats qualitatives del flux variació total les estudiem a [6], en col·laboració amb Ildefonso Díaz, on establim que les solucions del problema de Neumann aconseguen la mitjana de la dada inicial en temps finit, fenomen que ja s'havia observat numèricament. El problema de Cauchy el va estudiar Caselles a [31], en col·laboració amb Giovanni Bellettini i Matteo Novaga, on, a més de veure que el problema està ben posat en el sentit de Hadamard, s'estudia l'evolució dels conjunts de perímetre finit, i es demostra que en el cas bidimensional els conjunts que evolucionen sense deformat-se són els denominats *conjunts calibrables* en la teoria geomètrica de la mesura.

Els coneixements i tècniques obtinguts en l'estudi del flux variació total ens van permetre estudiar a [8] i [9] problemes parabòlics quasilineals associats a funcionals d'energia amb creixement lineal a l'infinit, més concretament

problemes de la forma

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{a}(x, Du) & \text{a } Q = (0, \infty) \times \Omega, \\ u(t, x) = \varphi(x) & \text{sobre } S = (0, \infty) \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \Omega, \end{cases} \quad (2)$$

amb  $\mathbf{a}(x, \xi) = \nabla_{\xi} f(x, \xi)$ , on  $f$  és un funcional amb creixement lineal en  $\|\xi\|$  quan  $\|\xi\| \rightarrow \infty$ . Un dels exemples més representatius és el funcional d'àrea  $f(\xi) = \sqrt{1 + \|\xi\|^2}$ , l'operador diferencial associat del qual és el de les superfícies mínimes.

Els resultats anteriors i els obtinguts sobre el flux variació total són la base de la monografia [10], amb la qual el 2003 vam obtenir el premi Ferran Sunyer i Balaguer.

Caselles tenia un gran coneixement de les propietats fines de les funcions de variació fitada i de la teoria geomètrica de la mesura i en aquest camp va col·laborar intensament amb una de les escoles més potents, la de Pisa, fundada per I. de Giorgi. La seva primera col·laboració amb aquesta escola és un treball important, en col·laboració amb Luigi Ambrosio, Simon Masnou i Jean-Michel Morel [4], en el qual s'estudia la noció de connexió des del punt de vista de la teoria geomètrica de la mesura, i els resultats teòrics que s'obtenen s'apliquen a problemes del processament d'imatges. Després d'aquesta primera col·laboració amb matemàtics de l'escola de Pisa, la relació de Caselles amb membres d'aquesta escola ha estat molt intensa i fructífera, especialment amb Giovanni Bellettini i Matteo Novaga, amb els quals a [32] obtenen solucions explícites del problema  $\Delta_1 u = u$ , solucions que descriuen el comportament asimptòtic de les solucions del problema de Cauchy associat al flux variació total. Com una aplicació obtenen solucions explícites del problema de *denoising* (netejat d'imatges). Al grup anterior es va incorporar Antonin Chambolle de l'École Polytechnique i amb ells obté dos treballs importants [29, 30] sobre l'evolució de subconjunts convexs de  $\mathbb{R}^N$  per mitjà de la curvatura mitjana cristal·lina, *i. e.*, a través del flux gradient del funcional d'energia de superfície definit per

$$P_{\varphi}(E) := \int_{\partial E} \varphi^0(\nu_E) d\mathcal{H}^{N-1} \quad (\nu_E \text{ és la normal unitària a } \partial E),$$

on  $\varphi^0: \mathbb{R}^N \rightarrow [0, \infty)$  és una funció positivament homogènia de grau 1 tal que  $\{\varphi^0 \leq 1\}$  és un poliedre. A [29] proven l'existència i unicitat de solucions d'aquest flux quan la dada inicial és un conjunt compacte convex admissible de  $\mathbb{R}^N$ . Com a conseqüència, resolen un problema proposat per Almgren-Taylor-Wang el 1993 [1]. A [30], entre altres resultats, es demostra que si la dada inicial és un cos convex  $C$  i  $C(t)$  és la solució del flux anterior, imposant que es preservi el volum, es té que  $C(t)$  convergeix respecte de la distància de Hausdorff, quan  $t \rightarrow \infty$ , a un traslladat de la forma de Wulff de volum  $|C|$ , *i. e.*, a una solució del problema de minimització

$$\inf\{P_{\varphi}(E) : |E| = |C|\},$$

on  $\varphi(\xi) := \sup\{\langle \eta, \xi \rangle : \varphi^0(\eta) \leq 1\}$ .

Un altre treball interessant, sorgit de la seva col·laboració amb Chambolle i Novaga és [31], en què estudien la regularitat de les solucions del problema d'eliminació del soroll d'una imatge per mitjà de la variació total. Més precisament obtenen, per a dimensions menors o iguals que 7, que si  $u$  és un mínim del funcional

$$\int_{\Omega} \|Du\| + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u - f|^2,$$

i  $f \in C^{0,\beta}(\Omega)$ ,  $0 \leq \beta \leq 1$ , aleshores,  $u \in C^{0,\beta}(\Omega)$ .

En col·laboració amb un dels seus doctorands, François Alter, i amb Antonin Chambolle, a [3] generalitzen els resultats bidimensionals obtinguts a [31] i fan una caracterització dels conjunts convexos calibrables per mitjà de la curvatura de la seva frontera.

En la teoria dels conjunts convexos, una classe molt important són els anomenats *conjunts de Cheeger*, que són els que minimitzen la proporció entre el seu perímetre i el seu volum. Més precisament, donat un conjunt fitat  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , la seva constant de Cheeger es defineix com

$$h_{\Omega} := \min_{F \subset \Omega} \frac{\text{Per}(F)}{|F|}. \quad (3)$$

Un conjunt de Cheeger de  $\Omega$  és qualsevol conjunt  $G \subseteq \Omega$  que minimitza (3).

Els conjunts de Cheeger tenen un paper important en molts camps, per exemple, en el comportament asimptòtic de les solucions de l'equació d'evolució amb curvatura mitjana constant, en el problema d'autovalors associat al flux variació total, en problemes de disseny òptim, etc. El problema de la unicitat dels conjunts de Cheeger era un problema obert important. Aquest problema va ser resolt per Caselles, Chambolle i Novaga a [62], que van suposar que  $\Omega$  és uniformement convex i de classe  $C^2$ . La solució definitiva va ser obtinguda per Caselles en col·laboració amb François Alter, a [2], en què proven que dins de cada cos convex no trivial de  $\mathbb{R}^N$  existeix un únic conjunt de Cheeger que, a més, és convex i de classe  $C^{1,1}$ . L'extensió d'aquest resultat al context dels espais de Gauss  $n$ -dimensionals i als espais de dimensió infinita de Wiener va ser duta a terme a [70].

### 2.3 L'estudi de les equacions quasilineals fortament degenerades

Després dels nostres treballs sobre la variació total i les equacions de tipus (2), comencem a estudiar equacions quasilineals fortament degenerades, l'operador diferencial de les quals és de la forma  $\text{div} \mathbf{a}(u, Du)$  amb  $\mathbf{a}(z, \xi) = \nabla_{\xi} f(z, \xi)$ , i amb el lagrangia  $f$  que satisfà, fonamentalment, la condició

$$C_0 \|\xi\| - D_0 \leq f(z, \xi) \leq M(\|\xi\| + 1). \quad (4)$$

Equacions d'aquest tipus apareixen en molts problemes físics, com, per exemple, en la física del plasma. No obstant això, la literatura matemàtica sobre aquest tipus d'equacions era pràcticament inexistent i la que existia, dos treballs de Michael Bertsch i Roberta Dal Passo [37, 74] i un de Philippe Blanc [39],



era en dimensió 1. Per estudiar aquest problema usem el marc de les equacions d'evolució governades per operadors acretius, amb la qual cosa vam haver d'estudiar primerament el problema el·líptic. Això ho vam fer a [11]. El problema més difícil va ser, de nou, interpretar correctament l'operador diferencial. Per a això vam haver de desenvolupar un càlcul funcional inspirat en els funcionals d'energia relaxats estudiats per l'escola de càlcul de variacions de Pisa. Amb els resultats d'aquest treball i el teorema de Crandall-Liggett, aconseguim a [13] demostrar que el problema de Neumann associat a l'operador  $\operatorname{div} \mathbf{a}(u, Du)$  està ben posat.

Una vegada resolt aquest problema, vam tenir coneixement del treball de Yann Brenier [40], en el qual dedueix, per mitjà de la teoria del transport optimal de masses, i usant una funció cost que penalitza l'evolució a una velocitat més gran que una constant prefixada, l'equació que va denominar *equació relativista de la calor*. L'equació va ser proposada primerament per Philippe Rosenau a [97], per donar una resposta al problema de la velocitat de propagació infinita de l'equació de la calor i de les equacions lineals de difusió. Aquesta equació

$$u_t = \nu \operatorname{div} \left( \frac{u Du}{\sqrt{u^2 + \frac{\nu^2}{c^2} |Du|^2}} \right) \quad (5)$$

té associat el lagrangiana

$$f(z, \xi) = \frac{c^2}{\nu} |z| \sqrt{z^2 + \frac{\nu^2}{c^2} |\xi|^2}, \quad (6)$$

que no satisfà la condició (4). Com assenyala Brenier a [40], l'equació relativista de la calor és una entre les nombroses *equacions de difusió amb flux limitat* usades en la teoria de la radiació hidrodinàmica [91], un exemple de la qual és

$$u_t = \nu \operatorname{div} \left( \frac{u Du}{u + \frac{\nu}{c} |Du|} \right), \quad (7)$$

que va ser proposada per R. Wilson.

A [12] estudiem el problema de Cauchy per a una classe general de problemes quasilineals fortament degenerats de la forma

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{a}(u, Du) & \text{a } Q_T = (0, T) \times \mathbb{R}^N, \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (8)$$

on  $0 \leq u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ ,  $\mathbf{a}(z, \xi) = \nabla_\xi f(z, \xi)$ . La hipòtesi principal sobre  $f$  és que tingui el creixement lineal

$$C_0(z) \|\xi\| - D_0(z) \leq f(z, \xi) \leq M_0(z) (\|\xi\| + 1) \quad (9)$$

per a cada  $(z, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ , i funcions contínues i positives  $C_0, D_0, M_0$ , amb  $C_0(z) > 0$  per a cada  $z \neq 0$ . El lagrangia (6), així com el corresponent a l'equació (7), satisfà (9). Com a conseqüència dels resultats de [12], trobem que el problema de Cauchy per a l'equació (5) està ben plantejat. En col·laboració amb Salvador Moll, provem a [16] que les solucions del problema de Cauchy per a l'equació (5) tenen velocitat de propagació  $c$ , que és la constant que apareix a l'equació, i a [17] veiem que el problema de Dirichlet per a l'equació (5) està ben posat.

Heurísticament veiem que si es fa tendir  $c \rightarrow \infty$  a l'equació (5), s'obté l'equació clàssica de la calor. La demostració rigorosa, de fet, està lluny de ser trivial i va ser obtinguda per Caselles a [57].

El concepte de solució d'entropia per al problema de Cauchy per a l'equació (5) és bastant complicat i tècnic; penseu, per exemple, que la derivada temporal és un element del dual de l'espai  $L^1(0, T; BV(\mathbb{R}^N))$  ja que les solucions tenen fronts de discontinuïtat que es mouen a la velocitat  $c$ . No obstant això, en l'article [14] es van obtenir uns resultats de regularitat que van permetre fer una caracterització bastant natural de les solucions d'entropia. Caselles a [58] va millorar aquest resultat i va deduir que el conjunt de salt consta de fronts que es propaguen a la velocitat donada per una condició de tipus Rankine-Hugoniot, cosa que posa de manifest el caràcter hiperbòlic de l'equació (5).

El primer model de fronts de propagació per mitjà d'equacions de reacció-difusió és la denominada *equació de Fisher-Kolmogorov*

$$u_t = D\Delta u + ku(1 - u), \quad (10)$$

que igual que l'equació de la calor té velocitat de propagació infinita. A [15] vam proposar com a model alternatiu al clàssic de Fisher-Kolmogorov, l'equació

$$\begin{cases} u_t = \nu \operatorname{div} \left( \frac{uD u}{\sqrt{u^2 + \frac{\nu^2}{c^2} |D u|^2}} \right) + ku(1 - u) & \text{a } Q_T = (0, T) \times \mathbb{R}^N, \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (11)$$

Demostrem que per a dades inicials  $0 \leq u_0 \leq 1$ , el problema (11) té una solució d'entropia única, la velocitat de propagació de la qual està limitada per  $c$ . Usant el concepte de solució d'entropia introduït a [15], J. Campos, P. Guerrero, Ó. Sánchez i J. Soler a [47] fan un estudi de les ones viatgeres de (11), en el cas unidimensional, i demostren que hi ha ones viatgeres que són solucions d'entropia discontinües i que viatgen a velocitat  $c$ .

Un altre dels temes en què Caselles va treballar va ser en les equacions de difusió amb flux limitat en medis porosos o de difusió ràpida. A [59] estudia el problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{a}(u, D\Phi(u)) & \text{a } Q_T = (0, T) \times \mathbb{R}^N, \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{per a } x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (12)$$

on  $0 \leq u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ ,  $\mathbf{a}(z, \xi) = \nabla_\xi f(z, \xi)$ , amb  $f$  que satisfà condicions del tipus (9) i  $\Phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  és una funció estrictament creixent amb  $\Phi(0) = 0$ ,  $\Phi, \Phi^{-1} \in W^{1,\infty}([a, b])$ ,  $0 < a < b$ . Un cas particular important és l'equació

$$u_t = \alpha \operatorname{div} \left( \frac{\Lambda(u) D\Phi(u)}{\sqrt{1 + \beta |D\Phi(u)|^2}} \right) \quad (13)$$

per a la qual demostra propietats de regularitat i caracteritza la condició d'entropia mitjançant una condició de tipus Rankine-Hugoniot, i obté que el front de discontinuïtats de la solució d'entropia es mou a velocitat

$$v = \frac{\Lambda(u^+(t)) - \Lambda(u^-(t))}{u^+(t) - u^-(t)}.$$

Hi ha dues maneres d'escriure equacions amb flux limitat en medis porosos o de difusió ràpida, a saber:

$$u_t = \operatorname{div} \left( \frac{u^m Du}{\sqrt{u^2 + \frac{1}{c^2} |Du|^2}} \right), \quad u_t = \operatorname{div} \left( \frac{u Du^m}{\sqrt{1 + \frac{1}{c^2} |Du^m|^2}} \right). \quad (14)$$

La demostració rigorosa de la convergència, quan  $c \rightarrow \infty$ , de les equacions anteriors a les equacions clàssiques corresponents

$$u_t = \operatorname{div}(u^{m-1} Du), \quad u_t = \operatorname{div}(u Du^m), \quad (15)$$

respectivament, va ser feta per Caselles a [60]. A [46], va estudiar al costat de Juan Calvo propietats de regularitat de les equacions (14), i també va veure que el problema de Cauchy per a l'equació (14) està ben posat en el rang de la difusió ràpida,  $0 < m < 1$ ; el cas de medis porosos,  $m \geq 1$ , està tractat a [12]. A [18] es fa un estudi numèric de l'equació (14) que posa en evidència que l'evolució de les solucions numèriques està caracteritzada per tres fases. En la primera, el perfil de la solució canvia, però el suport no es mou. En una segona fase, la solució desenvolupa discontinuïtats dins del seu suport i les propaga en temps finit cap a la frontera. Finalment, quan s'ha format la discontinuïtat de salt a la frontera, el suport comença a créixer i apareix un front discontinu. L'estudi numèric de l'equació relativista de la calor i de l'equació (14), en el cas unidimensional, el va dur a terme Caselles al costat de J. A. Carrillo i S. Moll a [48]. Aquest estudi va ser ampliat a [45].

L'estudi de les ones viatgeres per a l'equació (14), amb un terme de reacció com el de l'equació (11), l'han fet recentment J. Calvo, J. Campos, V. Caselles, Ó. Sánchez i J. Soler a [44], i han obtingut que per a  $m > 1$ , a més dels tipus d'ones viatgeres que es tenen per a  $m = 1$ , apareixen dos nous tipus d'ones viatgeres: unes que són contínues però no suaus i unes altres que són discontinües a l'interior del suport, la qual cosa constitueix un primer exemple d'una solució d'una equació parabòlica no lineal amb una discontinuïtat a l'interior del seu suport. Un *survey* excellent dels resultats sobre equacions

amb flux limitat en medis porosos obtinguts per Caselles en col·laboració amb el grup de recerca en EDP de Granada, es troba a [43].

A més de la monografia [10], Caselles és autor de dues monografies més, una en col·laboració amb Marc Bernot i Jean-Michel Morel [33], sobre transport òptim en xarxes, en la qual fan un tractament matemàtic unificat dels plans de tràfic; i una altra en col·laboració amb Pascele Monasse [71], sobre la descripció geomètrica de les imatges pel seu mapa topogràfic, amb moltes aplicacions a la visió per ordinador.

Em sento molt orgullós d'haver col·laborat amb Vicent Caselles durant més de vint anys. He tingut la sort de treballar amb un matemàtic que posseïa una cultura i una formació excepcionals. A més, des del punt de vista humà Vicent era una persona extremament generosa, compartia les seves idees amb qualsevol company que estigués interessat en el tema, sense límits ni imposicions. La petjada humana i matemàtica de Vicent Caselles serà, entre nosaltres i en la comunitat matemàtica mundial, absolutament perdurable.

### 3 Contribucions de Vicent Caselles a la interpolació d'imatges

per Pablo Arias

Un dels interessos principals de Vicent Caselles al llarg de la seva carrera va ser el problema de la interpolació d'imatges. Una imatge en escala de grisos pot modelar-se com una funció escalar definida en un domini rectangular  $\mathcal{R}$  del pla euclidià. Suposem que coneixem el valor d'una imatge en un subconjunt del seu domini  $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}$ . Anomenem  $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  aquests valors coneguts i  $\mathcal{O}$  la regió d'interpolació, i. e.  $\mathcal{O} = \mathcal{R} \setminus \mathcal{D}$ . El problema és, llavors, trobar una imatge  $u: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que coincideixi amb  $f$  a  $\mathcal{D}$ . Per concretar el problema cal donar una noció precisa del que entenem per imatge. Una imatge és una funció molt complexa en la qual coexisteixen zones regulars, discontinuïtats, textures amb patrons complexos aleatoris i/o fractals. Un model matemàtic per a la interpolació d'imatges ha de capturar aquests fenòmens i ser capaç de reproduir-los amb realisme. Les tècniques existents poden separar-se en les anomenades d'*inpainting* geomètric (o locals) i les texturals (o no locals).

Els mètodes d'*inpainting* geomètric pressuposen algun tipus de regularitat sobre la imatge i usen per completar-la mecanismes de propagació i/o difusió, en general mitjançant EDP. De la informació disponible a  $\mathcal{D}$ , aquests mètodes utilitzen solament aquella que es troba al voltant de  $\partial\mathcal{O}$ , d'aquí el terme *local*. Aquestes tècniques funcionen bé per a imatges sense textures (per exemple, regulars a trossos) i per a dominis d'interpolació petits.

Els mètodes d'*inpainting* textural funcionen copiant fragments de la part coneguda  $\mathcal{D}$  a  $\mathcal{O}$ . Es diuen també *mètodes per pegats* o *no locals* (*patch-based methods* en anglès). Per la seva capacitat per reproduir textures solen obtenir resultats molt més realistes que els de les tècniques locals, i a més poden

aplicar-se a dominis d'interpolació més grans. Són mètodes més aviat algorítmics i la seva modelització matemàtica és més difícil.

Des de finals de la dècada dels noranta, els models matemàtics d'interpolació d'imatges van anar evolucionant, així com la seva capacitat de generar resultats cada vegada més realistes a partir de menys quantitat de dades. Vicent Caselles pot considerar-se un dels fundadors d'aquest camp i va contribuir en gran manera al seu desenvolupament (tant a la interpolació geomètrica com a la textural).

### 3.1 *Inpainting* geomètric

El primer treball de Caselles sobre el tema es va publicar el 1998, amb Morel i Sbert [72], i s'hi estudia el problema d'interpolació d'una funció contínua a partir de valors coneguts a la frontera (una corba de Jordan tancada). El resultat principal és una caracterització dels interpoladors que compleixen una sèrie de requisits (axiomes) naturals, que corresponen a propietats d'invariància (a isometries i homotècies, i a canvis d'escala afins) i tres axiomes bàsics sobre la dependència amb la dada de frontera: a saber (i) monotonia pel que fa a les dades de frontera, (ii) regularitat (dependència contínua de la dada en un domini infinitesimal a través de les seves derivades primeres i segones), (iii) idempotència (si  $u$  és el resultat de l'interpolador a  $\mathcal{O}$ , i  $u'$  el resultat a  $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$  usant  $u$  com a dada de frontera, aleshores  $u' = u|_{\mathcal{O}'}$ ).

Suposant que les dades de frontera són contínues, es demostra que els interpoladors que compleixen els axiomes són solucions de viscositat de l'EDP parabòlica següent a  $\mathcal{O}$ :

$$G(A) = 0, \quad \text{amb} \quad A = \begin{pmatrix} u_{\xi\xi} & u_{\xi\eta} \\ u_{\xi\eta} & u_{\eta\eta} \end{pmatrix},$$

on  $\xi = \nabla u / |\nabla u|$  és el camp de direccions del gradient,  $\eta = \xi^\perp$  el de les corbes de nivell i  $G$  és una funció no decreixent tal que  $G(aB) = aG(B)$  per a  $a \in \mathbb{R}$ . En el cas que  $G$  sigui diferenciable a l'origen, les opcions es limiten encara més:  $G(A) = \text{tr}(BA)$  amb  $B$  una matriu no negativa. Aquest resultat mostra que no hi ha gaires opcions per interpolació raonablement  $u$  a partir dels seus valors en la frontera. Com a casos particulars del cas  $G$  diferenciable, hi ha l'estimador harmònic  $\Delta u = 0$ , el  $p$ -laplacià, el moviment per curvatura mitjana  $u_{\eta\eta} = 0$ , i el  $\infty$ -laplacià o AMLE (*absolutely minimizing Lipschitz extensions*), que correspon a imposar que la derivada segona en la direcció del gradient sigui nul·la. Aquest últim permet, a més, especificar el valor de la funció en punts aïllats. L'article [72] és la primera aplicació de l'AMLE al processament d'imatges. En dos treballs posteriors de Vicent Caselles amb Marcelo Bertalmío, Laura Igual i Oliver Sander s'estén aquesta teoria axiomàtica a imatges definides en superfícies [99, 65].

Els interpoladors estudiats a [72] estan limitats en no conèixer-se les derivades de la funció que cal interpolació. En la literatura se sol distingir un tipus específic de problema d'interpolació, en el qual la part coneguda  $\mathcal{D}$  és

un conjunt obert on es coneixen les derivades de  $u$ . Típicament, el domini d'interpolació  $\mathcal{O}$  consisteix en algunes regions, la frontera de les quals és una corba regular o regular a trossos. Un exemple d'aquest tipus d'interpolació és quan volem editar una imatge levant-ne un objecte. Aquest problema es coneix per diversos noms, els més comuns són *inpainting*, *desoclusió*, *emplenat (fill-in)* i *eliminació d'objectes*.

El primer article d'*inpainting* geomètric va ser escrit també el 1998, per Masnou i Morel [90]. Els autors proposen interpolat la imatge reconstruint les corbes de nivell interrompudes per  $\mathcal{O}$ . La corba de nivell  $\lambda$  es defineix com la frontera del conjunt de nivell superior a  $\lambda$ , que denotem  $\Gamma_\lambda = \{x \in \mathcal{R} : u(x) \geq \lambda\}$ . Suposant que les corbes de nivell són regulars en l'oclusió  $\mathcal{O}$ , els autors proposen minimitzar l'energia següent per a cada corba de nivell

$$E(u) = \int_\lambda \int_{\partial\Gamma_\lambda} \alpha + \beta |\kappa(s)|^p ds d\lambda,$$

on  $s$  és la longitud d'arc i  $\kappa(s) \geq 0$  la curvatura. L'energia té paràmetres  $p \geq 1$ ,  $\alpha, \beta > 0$ . Masnou i Morel presenten en el seu article un algorisme enginyós per calcular un òptim global aplicable únicament al cas  $p = 1$ . En aquest cas, l'energia es redueix a la longitud de la corba més la variació total de l'angle del vector tangent, i les condicions de vora admeses són les posicions dels extrems de la corba. La corba òptima és simplement el segment de recta que connecta tots dos extrems, la qual cosa òbviament no garanteix la continuïtat del vector de la corba de nivell a la frontera. En la figura 1 es compara l'AMLE proposat a [72] amb l'interpolador de Masnou i Morel. Més interessant és el cas  $p > 1$ , en el qual l'energia admet com a condicions de frontera la posició i la direcció tangent dels extrems de la corba, cosa que permet estendre contínuament el vector tangent. El cas  $p = 2$  correspon a l'energia elàstica d'Euler, usada per modelar la flexió mecànica de bigues. Masnou i Morel estudien aquest cas, però sense resoldre'l numèricament.



FIGURA 1: Comparació entre l'AMLE [72] i l'algorisme de Masnou i Morel [90]. El resultat de Masnou i Morel pot ser discontinu.

El treball de Masnou i Morel proposa una descomposició del problema de minimitzar l'energia  $E(u)$  en dos: la interpolació de les corbes de nivell (morfologia de la imatge) i la propagació dels nivells de gris al llarg de les corbes

de nivell interpolades. Aquesta idea forma part d'una filosofia promoguda per Caselles, Coll i Morel que identifica les corbes de nivell (i les seves singularitats) com a primitives bàsiques de les imatges [63]. Gran part del desenvolupament posterior del camp segueix aquesta idea.

L'any 2000, Bertalmío, Sapiro, Caselles i Ballester van publicar el famós article «Image inpainting» [36], que va donar el nom al problema. Aquest treball presenta una EDP evolutiva que busca emular el treball dels restauradors d'art en la recuperació de llacunes en pintures murals al fresc. *Inpainting* és el nom en anglès que els restauradors donen a aquesta tasca. L'EDP busca propagar una «mesura de la suavitat» de la imatge al llarg de les corbes de nivell de la imatge buscada  $u$ . La mesura de suavitat proposada pels autors és el laplacià, la qual cosa dona lloc a una EDP de tercer ordre:

$$u_t = \nabla^\perp u \cdot \nabla \Delta u + \nu \operatorname{div}(g(|\nabla u|) \nabla u).$$

El segon membre del costat dret és un terme de difusió no lineal, inclòs per millorar l'estabilitat numèrica de l'EDP. La no linealitat  $g$  és positiva i decreixent, amb l'objectiu de reduir la difusió en zones de gradient alt per a preservar les vores dels objectes. Es presenta una discretització de l'EDP usant diferències finites, i s'obtenen resultats que al seu moment van ser visualment impressionants (figura 2). L'article [36] és el primer en proposar una EDP per a *inpainting*, i va tenir una gran influència en els treballs posteriors. No obstant això, les seves solucions manquen de la interpretabilitat geomètrica de la interpolació per elàstics d'Euler.



FIGURA 2: Un dels resultats presentats a [36].

A partir del 2001 Ballester, Bertalmío, Caselles, Sapiro i Verdera van publicar una sèrie de treballs en els quals es proposa minimitzar una relaxació de l'energia elàstica d'Euler [28, 24, 27]. Introdueixen un camp vectorial  $\theta: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  sobre el qual imposen que  $\theta(x) \cdot \nabla u(x) = |\nabla u(x)|$  i  $|\theta(x)| \leq 1$ . És a dir,  $\theta$  correspon al camp de direccions de  $\nabla u$ . Els autors argumenten que si  $u$  és la funció característica d'un conjunt  $\Gamma$  llavors

$$\int_{\mathcal{R}} |\operatorname{div}(\theta)|^p |\nabla u| dx = \int_{\partial\Gamma} |\kappa(s)|^p ds.$$

En funció d'aquesta observació proposen l'energia següent:

$$E(u, \theta) = \int_{\mathcal{R}} |\operatorname{div}(\theta)|^p (a + b|\nabla u_{\sigma}|) dx + \nu \int_{\mathcal{R}} (|\nabla u| - \theta \cdot \nabla u) dx,$$

on  $a, b, \nu > 0$ ,  $p \geq 1$  i  $u_{\sigma} = u * g_{\sigma}$  és la imatge convolucionada amb un nucli gaussià. Els autors proven l'existència de solucions de variació fitada per a  $p > 1$ . La constant  $a$  i el filtrat de la imatge són necessaris per a la prova. La segona integral força que el camp  $\theta$  coincideixi amb la direcció del gradient. Aquest article va ser el primer a resoldre numèricament l'energia elàstica d'Euler per a  $p > 1$  (o una relaxació d'aquesta). La introducció del camp  $\theta$  de direccions del gradient té com a objectiu obtenir una equació d'Euler-Lagrange més simple. Les derivades segones de  $u$ , necessàries per calcular la curvatura, s'expressen com a derivades de primer ordre de  $\theta$ , cosa que dona lloc a una equació de segon ordre. Si no es fes aquesta relaxació, l'EDP resultant seria de quart ordre (a més de no lineal) i, per tant, molt més difícil de resoldre numèricament. Recentment, altres autors han proposat algorismes numèrics ràpids per a l'elàstica d'Euler usant mètodes moderns d'optimització amb restriccions. Aquestes tècniques exploten el mateix principi d'introduir variables auxiliars utilitzat per Caselles i els seus col·laboradors uns quinze anys abans.

En treballs posteriors, aquesta tècnica va ser estesa per tractar imatges 3D [26] i per completar forats en superfícies triangulades [103, 64].

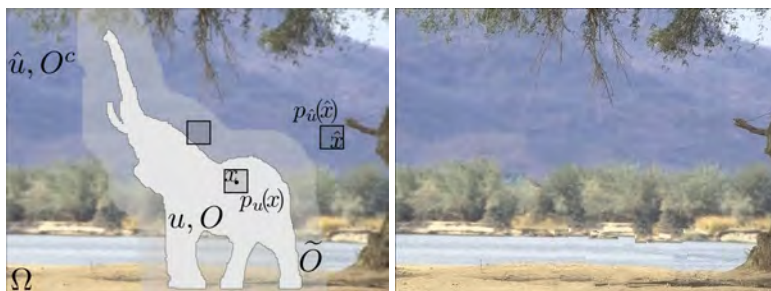


FIGURA 3: Notació per a l'inpainting textural, i resultat obtingut a [23].

### 3.2 Inpainting textural

L'inpainting textural es va desenvolupar en paral·lel a l'inpainting geomètric. La idea fonamental va ser proposada per Efros i Leung el 1999 a [77] en el context de síntesi de textures. Aquí es busca resoldre el problema següent: donada una imatge exemple d'una textura, generar una imatge diferent que sigui percebuda com si fos de la mateixa textura. Efros i Leung van proposar un algorisme molt simple que va superar significativament els resultats obtinguts fins al moment, en termes de la qualitat visual de les textures generades. Per a cada píxel  $x$  de la textura que cal sintetitzar, se'n tria un en la textura d'exemple entre aquells



que tinguin un veí semblat al de  $x$ . Els veïns usats són quadrats, per exemple de 7 per 7 píxels, i es diuen pegats (*patches* en anglès).

Denotarem per  $p_u(x)$  el pegat de  $u$  centrat en  $x$ , és a dir,  $p_u(x) = u|_{x+P}$ , on  $P$  és el domini del pegat: un quadrat de costat  $s$  centrat en l'origen. Definirem, a més, els conjunts  $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O} + P$  dels centres dels pegats que intersequen  $\mathcal{O}$ , i  $\tilde{\mathcal{D}} = \mathcal{R} \setminus \tilde{\mathcal{O}}$  el dels pegats coneguts (figura 3).

La idea de comparar els pegats per definir una mesura de semblança entre píxels va tenir un gran impacte i ràpidament va ser adoptada per a la resolució de molts altres problemes. Efros i Leung van ser els primers a aplicar-la al problema d'*inpainting*. El primer model variacional que formalitzava aquestes idees va ser proposat cinc anys després per Demanet, Song i Chan a [75]:

$$E(u, \varphi) = \int_{\tilde{\mathcal{O}}} \int_P (u(x+h) - f(\varphi(x)+h))^2 dh dx.$$

La variable  $\varphi$  és un *mapa de correspondències*  $\varphi: \mathcal{R} \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}$  que associa a cada posició de la imatge una posició sobre la part coneguda  $\tilde{\mathcal{D}}$ . S'imposa com a restricció que  $\varphi|_{\mathcal{D}} = \text{id}_{\mathcal{D}}$ . L'energia penalitza per a cada  $x \in \tilde{\mathcal{O}}$ , la norma  $L_2$  entre  $p_u(x)$  i  $p_f(\varphi(x))$ , el pegat conegut a  $\varphi(x)$ . Demanet, Song i Chan restringeixen la imatge interpolada  $u$  a ser  $u(x) = f(\varphi(x))$ , és a dir,  $u(x)$  es calcula copiant el valor de  $f$  en la posició corresponent segons  $\varphi$ . L'energia  $E(u, \varphi)$  és difícil de minimitzar. Posteriorment, altres autors suprimeixen la restricció sobre la imatge  $u$ , i optimitzen l'energia alternant minimitzacions en  $u$  i en  $\varphi$  [104, 86]. Aquests enfocaments consideren les imatges discretitzades, per la qual cosa no permeten estudiar la regularitat de les solucions.

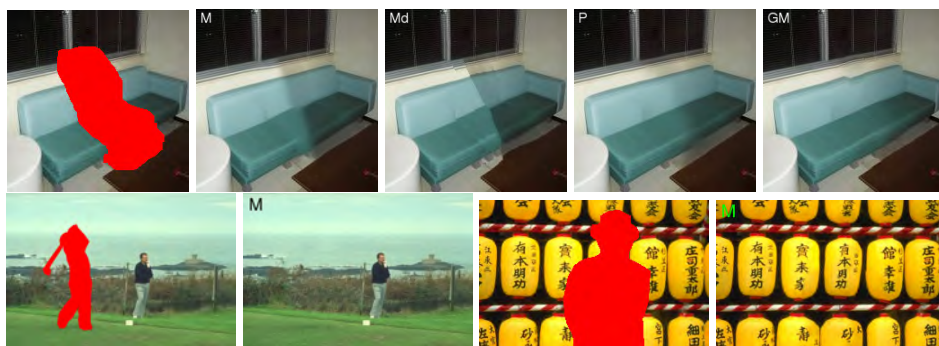


FIGURA 4: Fila superior: Resultats obtinguts a [23] amb les normes  $L_2$  i  $L_1$  entre pegats de  $u$  (la imatge), i normes  $L_2$  i  $L_1$  entre els pegats de  $\nabla u$ . Fila inferior: Resultats amb el model que penalitza la norma  $L_2$  entre pegats de  $u$ .

Entre el 2009 i el 2011, Caselles va publicar amb Arias, Facciolo i Sapiro una sèrie de treballs en els quals es proposa i s'analitza una família de funcionals per a l'*inpainting* per còpia de pegats [22, 78, 23]. Aquests treballs estan inspirats en un algorisme de reducció de soroll per mitjanes no locals introduït

per Buades, Coll i Morel a [41]. A partir d'una imatge  $f$  contaminada amb soroll blanc additiu, s'aproxima la imatge original  $u$  per una mitjana ponderada dels píxels de  $f$ :  $\hat{u}(x) = \int_{\mathcal{R}} w(x, y) f(y) dy$ . El pes  $w(x, y)$  pondera la contribució de  $f(y)$  a la mitjana, i és una funció decreixent de la distància  $L_2$  entre els pegats centrats en  $x$  i en  $y$ :  $w(x, y) \approx \exp\left(-\frac{1}{T} \|p_f(x) - p_f(y)\|_2^2\right)$ .

Gilboa i Osher [82] assenyalen que les mitjanes no locals minimitzen el funcional

$$E(u) = \int_{\mathcal{R}} \int_{\mathcal{R}} w(x, y) (u(x) - f(y))^2 dy dx.$$

En aquesta formulació els pesos  $w$  es calculen a partir de la imatge sorollosa. En el problema de l'*inpainting* això no és possible, ja que no coneixem els pegats a  $\mathcal{O}$ . El model proposat per Vicent Caselles i coautors busca estimar, juntament amb la imatge, els pesos  $w: \tilde{\mathcal{O}} \times \tilde{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbb{R}$  que mesurin la semblança entre els pegats sintetitzats en  $\mathcal{O}$  i els coneguts en  $\mathcal{D}$ :

$$E_T(u, w) = \int_{\tilde{\mathcal{O}}} \int_{\tilde{\mathcal{D}}} w(x, y) \|p_u(x) - p_f(y)\|_2^2 dy dx - TH(w),$$

amb la restricció que  $w(x, \cdot)$  sumi 1 sobre  $\tilde{\mathcal{D}}$ . El terme  $H(w)$  mesura l'entropia dels pesos  $w$ . Per minimitzar l'energia s'alternen minimitzacions en  $u$  i en  $w$ . A més d'introduir el terme *entropia* a l'equació anterior, una altra modificació pel que fa al funcional de Gilboa i Osher és que les diferències entre píxels se substitueixen per la distància  $L_2$  entre pegats. Això té com a conseqüència que en minimitzar respecte de  $u$ , mantenint fixos els pesos  $w$ , es realitzi una mitjana no local de pegats sencers en lloc de píxels. En minimitzar en  $w$  s'obtenen pesos com els usats per Buades, Coll i Morel. El paràmetre  $T$  controla la selectivitat d'aquests pesos. Si  $T \rightarrow \infty$ ,  $w(x, \cdot)$  tendeix a una distribució uniforme sobre  $\tilde{\mathcal{D}}$ , i en minimitzar en  $u$  omplirem cada  $u(x)$  com una mitjana de tota  $\mathcal{D}$ . Si  $T \rightarrow 0$  els pesos concentren la seva massa en els pegats de  $\tilde{\mathcal{D}}$  més propers al pegat a  $x$ . Aquest és el cas rellevant per al problema d'*inpainting*, en el qual es busca copiar trossos de la part coneguda de la imatge sense fer-ne la mitjana.

Usant altres distàncies entre pegats es poden definir diversos funcionals que donen lloc a algorismes d'*inpainting* amb determinades propietats. Els autors consideren la norma  $L_1$ , la normalització de la qual pel que fa a  $u$  dona lloc a una mitjana no local ponderada, i normes  $L_2$  i  $L_1$  entre pegats de les imatges de gradients  $\nabla u$  i  $\nabla f$ . Aquests models permeten copiar a  $\mathcal{O}$  gradients de  $f$  que s'integren per obtenir  $u$ , resolent una EDP a  $\mathcal{O}$  amb condicions de Dirichlet  $u(x) = f(x)$  a  $\partial\mathcal{O}$ . En la figura 4 es comparen els resultats obtinguts amb diferents models. En la imatge hi ha un sofà que travessa una transició gradual d'il·luminació. Els mètodes que copien pegats de  $u$  propaguen els extrems clar i fosc i generen una transició abrupta, mentre que els mètodes basats en gradients aconseguen una transició regular.

A [21] s'estudien els funcionals proposats (amb l'excepció del que usa la norma  $L_1$  del gradient) per a  $T > 0$ , i es prova l'existència de solucions regulars i

la convergència de l'algorisme de minimització cap a un punt crític. Quan  $T \rightarrow 0$ , els autors demostren que els funcionals, basats en normes  $L_2$ ,  $\Gamma$ -convergeixen a una energia similar a la de Demanet, Song i Chan, en aquestes normes els pesos  $w$  convergeixen a un mapa de correspondències  $\varphi$ , i estableixen un vincle entre els models no locals d'*inpainting* i els de reducció de soroll. Sobre el  $\Gamma$ -límit  $T = 0$  proven que hi ha solucions amb mapes de correspondències  $\varphi$  que són límit uniforme de funcions de variació fitada, encara que assenyalen que en els experiments moltes vegades s'obtenen mapes  $\varphi$  que són translacions a trossos, la qual cosa suggereix que la regularitat de  $\varphi$  podria ser més forta.

### 3.3 Extensions a imatges definides en varietats

En els últims anys, Caselles es va interessar per estendre alguns models d'interpolació i difusió a imatges definides sobre varietats riemannianes. La motivació és la d'obtenir operadors anisotròpics per a una imatge dotant-la d'una mètrica que en tingui en compte la geometria. A [42] es proposa un enfocament axiomàtic per definir espais d'escala d'imatges definides sobre varietats riemannianes. El resultat és una sèrie d'EDP que generen espais d'escala anisotròpics. A [25] s'estudia el problema de comparar pegats de dues imatges amb mètriques riemannianes diferents, aplicant l'enfocament axiomàtic a la funció de semblança entre veïns de les dues imatges. El cas lineal s'estudia en més detall a [80], on a més es mostra com es pot usar aquest formalisme per definir criteris de semblances invariants afins. Aquests criteris van ser usats després per proposar un algorisme d'*inpainting* que pot copiar pegats modificats mitjançant una transformació afí [79].

## 4 L'aportació de Vicent Caselles al problema de la detecció de contorns en una imatge digital a partir de les corbes geodèsiques

per Bartomeu Coll

Un dels problemes clàssics en el processament d'imatges és el problema de la detecció de contorns o, equivalentment, trobar les corbes o fronteres que separen regions homogènies d'una imatge. Aquest va ser un dels primers problemes en què Vicent Caselles va treballar en el camp del processament d'imatges a partir d'una formulació clàssica del problema proposada com una minimització d'un determinat funcional d'energia per Kass *et al.* [85]. En una primera aproximació, Caselles va voler entendre i comprendre bé el model d'energia per saber com ho podia interpretar a partir de la teoria d'evolució de corbes i fluxos geomètrics. En un primer treball conjunt [61], Caselles *et al.* proposen un model donat per un flux que evoluciona segons una EDP, basat en el moviment de la curvatura mitjana, el qual permet canvis automàtics en la topologia de l'objecte, a més de poder detectar simultàniament i sense cap coneixement previ diversos objectes de la imatge. Posteriorment, en un segon treball conjunt amb Kimmel i Sapir [66], proven que el model clàssic d'energia

és equivalent a trobar una corba geodèsica en un espai de Riemann amb una mètrica que es deriva de la mateixa imatge. Això significa que, en un determinat marc, la detecció d'una frontera pot ser considerada equivalent al càlcul d'una corba de longitud mínima ponderada. Aquest treball va marcar una fita en el problema de la detecció o segmentació d'objectes en una imatge, i va ser un dels més citats en aquesta àrea.

#### 4.1 El model geodèsic de contorns actius de Caselles, Kimmel i Sapiro

L'aproximació clàssica al problema proposada per Kass *et al.* [85], anomenada de *contorns actius* (o *snakes* en anglès) per la forma de l'evolució de les corbes, està basada en la deformació d'un contorn inicial  $C_0$  cap a la frontera de l'objecte que es vol detectar. Aquests contorns actius són exemples de tècniques de models de deformació d'objectes basats en la minimització d'una energia; vegeu [38, 102].

El funcional d'energia relacionat amb la corba plana  $C$  que actua sobre la imatge  $I$  ve donat per

$$E(C) = \alpha \int_0^1 |C'(q)|^2 dq + \beta \int_0^1 |C''(q)|^2 dq - \lambda \int_0^1 |\nabla I(C(q))| dq, \quad (16)$$

on  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\lambda$  són constants reals positives. Els dos primers termes controlen la regularitat dels contorns que s'han de detectar (energia interna), mentre que el tercer terme és el responsable d'atreure el contorn cap a l'objecte de la imatge (energia externa).

En el treball de Caselles *et al.* [66] els autors s'adonen que aquesta formulació també funciona amb  $\beta = 0$  i en aquest cas es pot estendre a la part de detecció de contorns si agafem una funció  $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$  estrictament decreixent tal que  $g(r) \rightarrow 0$  quan  $r \rightarrow \infty$ . Per tant,  $-|\nabla I|$  es pot substituir per  $g(|\nabla I|)^2$  i s'obté una energia més general, donada pel funcional següent

$$E(C) = \alpha \int_0^1 |C'(q)|^2 dq + \lambda \int_0^1 g(|\nabla I(C(q))|)^2 dq. \quad (17)$$

A més, el funcional (17) no és intrínsec, ja que depèn de la parametrització  $q$ , la qual és arbitrària. Però podem definir una nova parametrització  $q = \phi(r)$ ,  $\phi: [c, d] \rightarrow [0, 1]$ ,  $\phi' > 0$ , la qual cosa permet trobar una solució escollint una parametrització que sí que és intrínseca a la corba.

El pas següent del treball de Caselles *et al.* [66] és provar que la solució en la minimització de l'energia del model (17) ve donada per una corba geodèsica en l'espai de Riemann induït per la mateixa imatge  $I$ . Recordem que una corba geodèsica és un camí de distància mínima (local) entre punts donats. Llavors, per provar que la solució és una corba geodèsica en l'espai de Riemann, Caselles *et al.* usen el principi clàssic de Maupertuis per a sistemes dinàmics (Dubrovin *et al.* [76]). Aquest principi ens dona la solució del problema de l'energia en la forma d'una corba de mínima distància ponderada entre punts donats.

Amb tot això, Caselles *et al.* [66] proven que el problema de minimitzar (17) es transforma en un problema de calcular una geodèsica en un espai de Riemann, segons una nova mètrica, el qual és equivalent a trobar

$$\text{Min} \int_0^1 g(|\nabla I(C(q))|) |C'(q)| dq. \quad (18)$$

Per resoldre (18), una manera de fer-ho és emprar el mètode del descens del gradient en la seva versió ràpida, a partir de l'equació d'Euler-Lagrange de (18). Llavors la deformació de la corba inicial  $C(0) = C_0$  cap a un mínim (local) del funcional (18) ha de seguir l'equació d'evolució

$$\frac{\partial C(t)}{\partial t} = g(I)\kappa\vec{\mathcal{N}} - (\nabla g \cdot \vec{\mathcal{N}})\vec{\mathcal{N}}, \quad (19)$$

on  $\kappa$  és la curvatura euclidiana i  $\vec{\mathcal{N}}$  és el vector normal a la corba que apunta cap a l'interior de  $C$ .

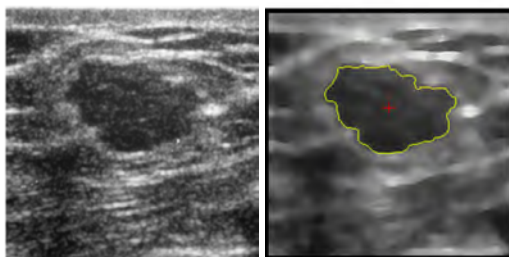


FIGURA 5: En aquest exemple, l'algorisme de Caselles *et al.* ens permet la detecció automàtica dels nòduls de mama.

## 4.2 Interpretació del flux geodèsic a partir dels conjunts de nivell

La interpretació de l'equació (19) passa per l'aproximació dels conjunts de nivell (vegeu Osher i Sethian [92, 101]), tal com es descriu seguidament.

Suposem que la corba  $C$  és un conjunt de nivell de la funció  $u: [0, a] \times [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  i, per tant,  $u$  dona una representació implícita de la corba  $C$ . Aquesta representació és intrínseca (no depèn de paràmetres) i també té la propietat que topologies diferents del conjunt de nivell zero no impliquen topologies diferents de  $u$ . És fàcil veure que si la corba plana  $C$  evoluciona segons l'equació  $C_t = \beta\vec{\mathcal{N}}$  per a una certa funció  $\beta$ , llavors la funció  $u$  es deforma d'acord amb l'equació  $u_t = \beta|\nabla u|$ , on  $\beta$  es calcula sobre els conjunts de nivell.

Basant-nos en l'expressió (18) i inserint l'evolució de  $C$  en l'equació (19) dins de  $u$ , obtenim que resoldre el problema geodèsic és equivalent a cercar

la solució  $u$  de l'estat asimptòtic,  $\frac{\partial u(t)}{\partial t} = 0$ , de l'equació d'evolució següent, amb condició inicial  $u(0, C) = u_0(C)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= |\nabla u| \operatorname{div} \left( g(I) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = \\ &= g(I) |\nabla u| \kappa + \nabla g(I) \cdot \nabla u. \end{aligned} \quad (20)$$

El terme  $g(I) |\nabla u| \kappa + \nabla g(I) \cdot \nabla u$  és l'equació d'Euler-Lagrange del funcional (18) amb la corba  $C$  representada pel conjunt de nivell de  $u$  i la curvatura  $\kappa$  calculada sobre els conjunts de nivell de  $u$ .

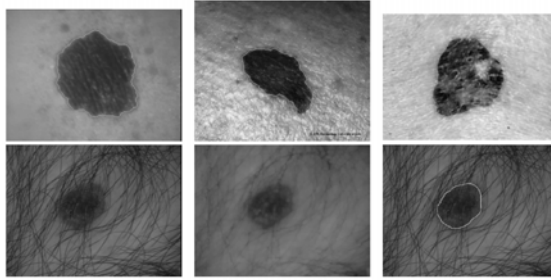


FIGURA 6: Exemple de l'aplicació del model geodèsic de Caselles, Kimmel i Sapiro, en la detecció d'una lesió cutània.

### 4.3 La detecció de la frontera a partir de l'evolució dels conjunts de nivell

En el seu primer treball dins el camp de les imatges, Vicent Caselles va proposar una equació basada en el moviment de la curvatura mitjana sobre les corbes de nivell d'una funció  $u$  per a la detecció dels contorns. En aquest treball, Caselles *et al.* [61] proposen el model d'EDP següent per a detectar la frontera d'un objecte  $O$

$$\begin{aligned} u_t &= g(I) |\nabla u| \left( \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \nu \right) = \\ &= g(I) (\kappa + \nu) |\nabla u|, \end{aligned} \quad (21)$$

on  $\nu$  és una constant positiva real i  $g(I)$  és la funció que atura l'evolució de la corba quan arriba a la frontera de l'objecte. Un cas particular seria agafar  $g(I) = \frac{1}{1+|\nabla \hat{I}|^p}$ , on  $\hat{I}$  és una versió regularitzada de  $I$ , per exemple, la convolució amb la gaussiana, i  $p = 1, 2$ . Aquest model d'evolució també va ser proposat per Malladi *et al.* [88, 89] a la mateixa època.

La interpretació geomètrica que es pot fer de l'equació (21) és la següent. El flux

$$u_t = (\kappa + \nu) |\nabla u|$$

descriu de quina manera cada un dels conjunts de nivell  $C$  de  $u$  evoluciona segons l'equació

$$C_t = (\kappa + \nu)\vec{\mathcal{N}},$$

on  $\vec{\mathcal{N}} = -\frac{\nabla u}{|\nabla u|}$  és el vector normal a la corba que apunta cap a l'interior de  $C$ . Aquesta equació va ser proposada per primera vegada per Osher i Sethian [92, 101], on es feia un estudi complet sobre l'anàlisi numèrica de l'equació. Noteu que quan la curvatura s'anulla (per exemple, quan passem per la frontera d'un objecte la convexitat del qual canvia), el terme  $\nu\vec{\mathcal{N}}$  actua com una velocitat constant i, per tant, la corba segueix la seva evolució. En aquest cas, el terme de velocitat constant empeny la corba cap endins (o cap a fora) i és crucial en el model (21) per permetre capturar formes no convexes a partir de corbes inicials convexes.

En el cas particular  $\nu = 0$ , l'equació d'evolució de cada un dels conjunts de nivell  $C$  de  $u$  ve donada per

$$C_t = \kappa\vec{\mathcal{N}},$$

anomenada equació del *flux euclidià de la calor* (*Euclidian heat flow*), coneguda per les seves propietats geomètriques de regularització. El flux fa decreïxer la curvatura total, així com també el nombre de zeros de la segona derivada (*zero-crossings*) i els valors crítics de la curvatura (màxims i mínims). La «força» donada per la curvatura  $\kappa$  actua com la força interna en el model clàssic (16), mentre que el flux euclidià de la calor  $C_t = \kappa\vec{\mathcal{N}}$  és exactament el flux de regularització de la curvatura que reemplaça el terme de regularització d'ordre més elevat en el mateix model (16).

Si comparem els models donats per les equacions (20) i (21), ens adonem de la desaparició del terme  $\nabla g(I) \cdot \nabla u$  en la primera formulació del model (21). Aquest terme atreu la corba cap a les fronteres dels objectes ( $\nabla g$  apunta cap a la meitat de la frontera), a més de permetre la detecció d'objectes no convexos. Noteu que en el primer model la corba s'atura quan  $g = 0$  i aquest fet només es dona en contorns ideals (quan es té una frontera «nítida» amb un gradient de valor alt constant), mentre que, en el cas geodèsic, el terme  $\nabla g(I) \cdot \nabla u$  és de gran ajuda quan la frontera de l'objecte té variacions altes sobre els valors del gradient. Un altre avantatge d'aquest nou terme és que podem eliminar parcialment la necessitat de la velocitat constant donada per  $\nu$  en el model (21) per detectar objectes no convexos, ja que introdueix un paràmetre extra.

En el cas que es vulgui afegir al model geodèsic aquesta força constant de cara a incrementar, per exemple, la velocitat de convergència, podem considerar el terme  $\nu g(I)|\nabla u|$  com un lligam d'àrea en el problema geodèsic (18), on  $\nu$  és el multiplicador de Lagrange. En aquest cas s'obté l'equació

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= |\nabla u| \operatorname{div} \left( g(I) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \nu g(I) |\nabla u| = \\ &= g(I)(\nu + \kappa) |\nabla u| + \nabla g(I) \cdot \nabla u, \end{aligned} \tag{22}$$

o bé la seva versió a partir del moviment dels conjunts de nivell

$$C_t = g(I)(v + \kappa)\vec{\mathcal{N}} - (\nabla g(I) \cdot \vec{\mathcal{N}})\vec{\mathcal{N}}, \quad (23)$$

anomenada pels autors del treball [66] *model general dels contorns actius geodèsics*.

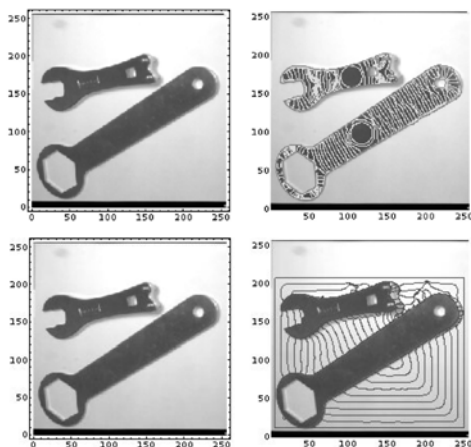


FIGURA 7: Exemple de l'aplicació de l'algorisme de Caselles *et al.* on la condició inicial és interior a l'objecte (figura superior) o exterior a l'objecte (figura inferior).

Basant-se en la teoria de solucions de viscositat [73], Caselles, Kimmel i Sapiro proven el teorema següent d'existència i unicitat de solució per al model general geodèsic (22). En l'enunciat,  $BUC(\mathbb{R}^2)$  denota el conjunt de les funcions uniformement contínues acotades sobre  $\mathbb{R}^2$ .

**TEOREMA 1.** *Sigui  $W^{1,\infty}$  l'espai de les funcions Lipschitz fitades en  $\mathbb{R}^2$ . Suposem que  $g \geq 0$  és una funció tal que  $\sup_{x \in \mathbb{R}^2} |Dg^{1/2}(x)| < \infty$  i  $\sup_{x \in \mathbb{R}^2} |D^2g(x)| < \infty$ . Sigui  $u_0 \in BUC(\mathbb{R}^2) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ . Aleshores*

(1) *L'equació (22), admet una única solució de viscositat*

$$u \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}^2) \cap L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2))$$

*per a tot  $T < \infty$ . A més satisfà*

$$\inf u_0 \leq u(t, x) \leq \|u_0 - v_0\|_\infty.$$

(2) *Sigui  $v \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}^2)$  la solució de viscositat de (22) corresponent a la condició inicial  $v_0 \in C(\mathbb{R}^2) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ . Llavors*

$$\|u(t, \cdot) - v(t, \cdot)\|_\infty \leq \|u_0 - v_0\|_\infty$$

*per a tot  $t \geq 0$ . Aquest fet prova que l'única solució és estable.*



#### 4.4 Extensió del model Caselles-Kimmel-Sapiro al cas de la detecció d'objectes 3D

Basant-se en el treball [67], Caselles *et al.* estenen el resultat dels contorns actius geodèsics al cas 3D a partir de la construcció d'un model de superfícies deformables que es mouen cap als objectes 3D que es volen detectar. Aquesta deformació és obtinguda a partir de la minimització d'un funcional de tal manera que el seu mínim local s'agafi a la frontera de l'objecte; vegeu [102, 38]. En els treballs de Caselles en col·laboració amb Kimmel, Sapiro i Sbert [68, 67], el model 3D proposat es basa en el moviment de la curvatura i el càlcul de les superfícies amb àrea mínima, conegudes com a superfícies minimal. Això significa que detectar l'objecte és equivalent a trobar una superfície d'àrea ponderada mínima, on el pes ve donat per la mateixa imatge. Més concretament i extrapolant la idea del cas 2D, es tracta de minimitzar l'àrea ponderada

$$A_R = \iint g(I) da,$$

on  $da$  és l'element d'àrea i  $g(I)$  és una funció pes, positiva i decreixent, igual que per al cas d'una imatge.

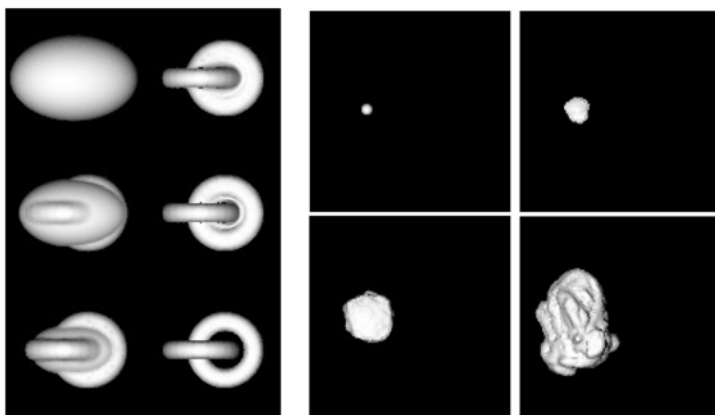


FIGURA 8: Esquerra: Exemple d'aplicació de l'algorisme en la detecció 3D basat en [67, 68] de dos torus enganxats. Dreta: Exemple de l'evolució cap a la detecció d'un tumor en una imatge MRI.

L'equació d'Euler-Lagrange de  $A_R$  dona lloc al flux

$$\frac{\partial S}{\partial t} = (g\mathcal{H} - \nabla g \nabla \cdot \vec{\mathcal{N}}) \vec{\mathcal{N}},$$

on  $S$  és la superfície 3D,  $\vec{\mathcal{N}}$  és el vector normal unitari a la superfície que apunta a l'interior i  $\mathcal{H}$  és igual a dues vegades la curvatura mitjana de  $S$ . De la mateixa manera que en el cas 2D, s'obté una equació d'evolució per al conjunt de nivell  $k$ ,  $u = k$ , on la superfície d'evolució està definida per  $S(t) = \{x : u(t, x) = 0\}$ , la qual és estable, robusta i permet també canvis de la topologia de la superfície durant el procés de deformació.

## 5 Sobre la contribució de Vicent Caselles al processament d'imatges en color de models variacionals inspirat en la visió humana

per Edoardo Provenzi

### 5.1 Introducció al color

El 1997, Caselles i Sapiro van utilitzar principis variacionals per fer una interpretació nova de l'equalització per histograma d'una imatge digital. El seu treball, profund i d'un mèrit indiscutible, va ser utilitzat una dècada més tard per construir un marc variacional per al realçament del color inspirat en les propietats del sistema de visió humana. A continuació en descriurem els resultats corresponents.

### 5.2 El funcional de Caselles-Sapiro per a l'equalització d'histograma

Fixem la notació. Sigui  $\Omega \subset \mathbb{Z}^2$  el *domini espacial* d'una imatge digital,  $|\Omega|$  és el nombre de píxels de la imatge, les coordenades espacials de la qual seran denotades per  $x \equiv (x_1, x_2)$  i  $y \equiv (y_1, y_2)$ . Sempre considerarem un *rang dinàmic normalitzat* a  $[0, 1]$ , de manera que una *funció d'imatge RGB* serà denotada per  $\vec{I}: \Omega \rightarrow [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ ,  $x \mapsto (I_R(x), I_G(x), I_B(x))$ , on cada component escalar defineix el nivell d'intensitat del píxel  $x \in \Omega$  en el canal vermell, verd i blau, respectivament. No és important especificar un canal de color particular, així que denotarem qualsevol dels components escalars de la imatge senzillament per  $I(x)$ .

Recordem breument què és l'equalització d'histograma. Sigui  $\lambda \in [0, 1]$  un nivell d'intensitat genèric, llavors l'*histograma normalitzat* de  $I$  calculat a  $\lambda$  és:

$$h(\lambda) = \frac{1}{|\Omega|} \text{card}\{x \in \Omega \mid I(x) = \lambda\}, \quad \lambda \in [0, 1], \quad (24)$$

*i. e.* la probabilitat de trobar un píxel amb intensitat igual a  $\lambda$ ; *card* és el cardinal del conjunt entre claus.

L'*histograma acumulatiu* de  $I$  calculat a  $\lambda$ ,  $H(\lambda)$ , és:

$$H(\lambda) = \frac{1}{|\Omega|} \text{card}\{x \in \Omega \mid I(x) \leq \lambda\}, \quad \lambda \in [0, 1], \quad (25)$$

*i. e.* la probabilitat de trobar un píxel amb intensitat menor o igual que  $\lambda$ .

Es diu que una imatge és *equalitzada* si cada nivell té la mateixa probabilitat d'aparèixer, *i. e.* si  $h(\lambda) \equiv 1$ , per a tot  $\lambda$ , que naturalment pot ser traduït a la condició següent a l'histograma acumulatiu:  $H(\lambda) = \lambda$ , per a tot  $\lambda$ .

És fàcil de provar (vegeu, *e. g.* [83]) que la transformació de  $[0, 1]$  en si mateix donada per  $\lambda \rightarrow H(\lambda)$  és l'aplicació més simple que implementa l'equalització de l'histograma.

Vicent Caselles i Guillermo Sapiro en el seu article [100] van fer una interpretació variacional de l'equalització de l'histograma. Els seus resultats es poden

resumir de la manera següent. Donat un funcional

$$E_{\text{hist eq}}(I) \equiv 2 \sum_{x \in \Omega} \left( I(x) - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{|\Omega|} \sum_{x \in \Omega} \sum_{y \in \Omega} |I(x) - I(y)|, \quad (26)$$

si  $I^* = \operatorname{argmin}_I E_{\text{hist eq}}(I)$ , aleshores  $I^*$  té histograma equalitzat, i.e.  $H(I^*(x)) = I^*(x)$  per a tot  $x \in \Omega$ .

A més, si  $I_0$  és la imatge original, llavors el problema de valor inicial per al descens del gradient

$$\begin{cases} \partial_t I = -\delta E_{\text{hist eq}}(I), \\ I(0) = I_0, \end{cases}$$

té només una solució, on  $t$  és el paràmetre d'evolució de l'esquema de descens del gradient iteratiu i  $\delta$  representa la primera variació del funcional.  $E_{\text{hist eq}}(I)$  s'anomenarà *funcional de Caselles-Sapiro* d'ara en endavant.

La interpretació de l'energia funcional  $E_{\text{hist eq}}(I)$  en termes de les característiques de la imatge és crucial. Primer de tot, fem notar que podem escriure

$$E_{\text{hist eq}}(I) = D_{\frac{1}{2}}(I) - C(I),$$

on

$$D_{\frac{1}{2}}(I) = 2 \sum_{x \in \Omega} \left( I(x) - \frac{1}{2} \right)^2 \quad \text{i} \quad C(I) = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{x \in \Omega} \sum_{y \in \Omega} |I(x) - I(y)|.$$

Per tant, la minimització de  $E_{\text{hist eq}}(I) = D_{\frac{1}{2}}(I) - C(I)$  s'assoleix a través de la minimització de  $D(I)$  i la maximització de  $C(I)$  (degut al signe menys davant d'aquesta quantitat).

El significat dels dos termes funcionals és el següent:

- $D_{\frac{1}{2}}(I)$  s'anomena *terme de dispersió quadràtica global* al voltant del nivell de gris mitjà  $1/2$  i es minimitza quan  $I(x) \equiv 1/2$  per a tot  $x \in \Omega$ , i.e. la minimització d'aquest terme tendeix a convertir  $I$  en una imatge uniforme en gris;
- $C(I)$  s'anomena *terme de contrast global* i la seva maximització amplifica el contrast global de la imatge  $I$ , expressada pel conjunt de diferències en valor absolut  $|I(x) - I(y)|$ .

Així, l'argument minimitzador del funcional de Caselles-Sapiro és la imatge que correspon a l'equilibri òptim entre *dos efectes oposats*: per una banda, la minimització de  $D_{\frac{1}{2}}(I)$  tendeix a *fixar tots els nivells al gris mitjà  $1/2$*  però, de l'altra banda, la minimització de  $-C(I)$  tendeix a *separar els nivells d'intensitat l'un de l'altre, tant com sigui possible*. L'equilibri entre les dues accions contraposades indueix a l'equalització de l'histograma.

Una conseqüència pràctica d'aquest resultat és que, aplicant per exemple la tècnica de descens del gradient per minimitzar  $E_{\text{hist eq}}(I)$ , hom pot parar el procés de minimització abans d'assolir l'equalització completa, i aconseguir per tant una *equalització parcial* que, no obstant això, pot ser útil per evitar el realçament excessiu típic d'imatges subexposades (vegeu [83] per a més detalls).

Tanmateix, per als propòsits de processament del color de la imatge, les conseqüències més importants d'aquest resultat són teòriques: de fet, tal com veurem en la propera secció, podem modificar el funcional  $E_{\text{hist eq}}(I)$  de tal manera que el principi d'equilibri bàsic de l'equalització de l'histograma es conserva, però podem canviar la forma analítica dels termes  $D_{\frac{1}{2}}(I)$  i  $C(I)$  inspirant-nos en les característiques de percepció de la visió humana. La imatge  $I^*$  minimitzadora del funcional modificat és una versió correctora de color de la imatge original guiada per les propietats de percepció del sistema visual humà.

### 5.3 Modificació del funcional de Caselles i Sapiro amb característiques de percepció humana

L'enllaç entre la interpretació variacional de l'equalització de l'histograma i les propietats del sistema visual humà rau en el fet que també la percepció visual es caracteritza per l'equilibri entre dues accions oposades, però amb algunes diferències importants. A continuació, veurem aquestes semblances i diferències.

Primer de tot, quan ens trobem immersos en una escena visual, la nostra visió s'adapta per percebre modulacions al voltant de la luminància mitjana de l'escena, una propietat anomenada *adaptació visual*, que pot ser considerada l'anàloga de l'acció del terme de dispersió.

Llavors, per segmentar millor l'objecte, el nostre sistema visual intensifica el contrast d'una manera que depèn de l'espai. En el sentit de les imatges, el canvi de contrast pot ser degut a l'aplicació d'un operador global que actui sobre tota la imatge o bé que el canvi de contrast sigui local (operador local que actua en un entorn de cada punt).

Finalment, hi ha dues característiques particulars que no són considerades dins de l'histograma d'equalització: la constància del color i la llei de Weber-Fechner. La primera propietat es refereix a l'habilitat de percebre els mateixos colors sota il·luminants diferents, mentre que el segon pot ser més o menys descrit com la resposta logarítmica de la vista humana a canvis d'intensitat de la llum.

A [93], es va demostrar que, per tal de tenir en compte aquestes propietats, el terme de contrast  $C(I)$  de l'energia  $E_{\text{hist eq}}(I)$  s'ha de modificar de la manera següent:

$$C_w^\varphi(I) = \sum_{x \in \Omega} \sum_{y \in \Omega} w(\|x - y\|) \varphi \left( \frac{\min(I(x), I(y))}{\max(I(x), I(y))} \right),$$

on  $w$  és una funció decreixent de la distància  $\|x - y\|$  entre píxels, cosa que dona lloc al terme de contrast, i  $\varphi$  és una funció diferenciable monòtona creixent, el significat de la qual discutirem més tard.

El quocient  $\min(I(x), I(y)) / \max(I(x), I(y))$  és invariant respecte dels canvis d'il·luminació del tipus  $I(x) \mapsto \lambda I(x)$ , on  $\lambda > 0$  és l'efecte d'un il·luminant uniforme no neutre. Per tant,  $C_w^\varphi(I)$  està en la línia de la constància de color, i

es pot demostrar també (vegeu [93] un altre cop) que aquesta forma de  $C_w^\varphi(I)$  és coherent amb la llei de Weber-Fechner.

$C_w^\varphi(I)$  és no diferenciable per la presència amagada del valor absolut en les expressions min i max, però es pot regularitzar, de manera que el terme del contrast regularitzat sigui diferenciable. Vegeu [93] per a més detalls. Aquesta primera variació  $\delta C_w^\varphi(I)$  és sempre una funció de  $1/I(x)$ , i això implica que, si es vol mantenir la coherència dimensional, no es pot utilitzar més el terme quadràtic de dispersió. Un terme de dispersió coherent amb la dimensió ve donat per l'entropia:

$$D_{\alpha,\beta}(I) = \alpha \sum_{x \in \Omega} \left[ \mu \log \frac{\mu}{I(x)} - (\mu - I(x)) \right] + \\ + \beta \sum_{x \in \Omega} \left[ I_0(x) \log \frac{I_0(x)}{I(x)} - (I_0(x) - I(x)) \right].$$

Aleshores, l'energia global que adapta el funcional de Caselles-Sapiro a les propietats de la visió humana és  $E_{w,\alpha,\beta}^\varphi = D_{\alpha,\beta}(I) + C_w^\varphi(I)$ .

A [93] es va demostrar que, sota unes condicions adequades per a  $\alpha$  i  $\beta$ , un esquema de descens del gradient semiimplícit per a  $\log I$ , inicialitzat amb la imatge original, convergeix a l'única imatge que és punt fix de  $E_{w,\alpha,\beta}^\varphi$ . Una anàlisi detallada d'aquest algorisme es troba a [81]. A la figura 9 es veuen resultats d'aquest algorisme.

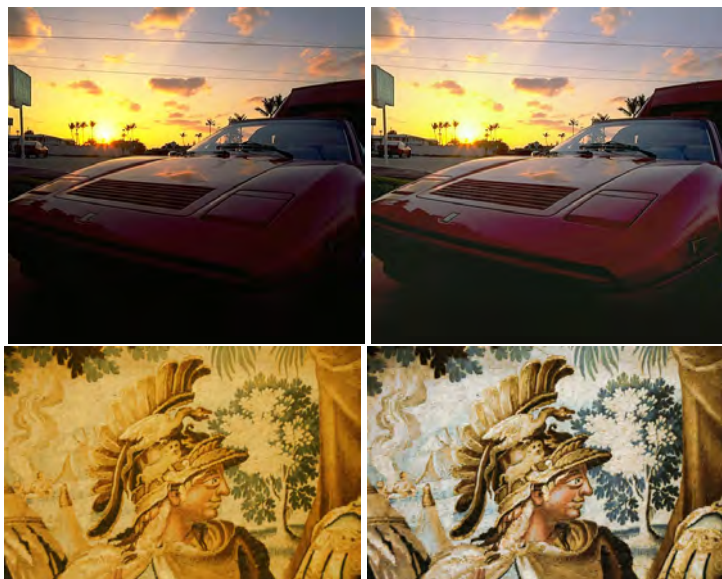


FIGURA 9: Esquerra: Imatges originals. Dreta: Resultat de l'algorisme variacional amb  $\varphi = \text{id}$  i una elecció adequada de paràmetres. Notem el realçament del contrast i la reducció del repartiment del color.

Des d'un punt de vista teòric, és interessant remarcar que, si triem  $\varphi = \text{id}$ , la funció identitat, aleshores l'algorisme variacional corresponent és una versió simètrica contínua de l'algorisme original Retinex [87, 95, 34], mentre que si posem  $\varphi = \log$ , aleshores obtenim una versió variacional de l'anomenat *algorisme d'ACE* [96, 35].

Finalment, cal dir que el marc variacional que acabem de discutir va inspirar una formulació basada en ondets [94] i una investigació més general de fenòmens perceptuals i cognitius que depenen del context [84].

## Referències

- [1] ALMGREN, F.; TAYLOR, J. E.; WANG, L. «Curvature-driven flows: a variational approach». *SIAM J. Control Optim.*, 31 (2) (1993), 387-438.
- [2] ALTER, F.; CASELLES, V. «Uniqueness of the Cheeger set of a convex body». *Nonlinear Anal.*, 70 (1) (2009), 32-44.
- [3] ALTER, F.; CASELLES, V.; CHAMBOLLE, A. «A characterization of convex calibrable sets in  $\mathbb{R}^N$ ». *Math. Ann.*, 332 (2) (2005), 329-366.
- [4] AMBROSIO, L.; CASELLES, V.; MASNOU, S.; MOREL, J.-M. «Connected components of sets of finite perimeter and applications to image processing». *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 3 (1) (2001), 39-92.
- [5] ANDREU, F.; BALLESTER, C.; CASELLES, V.; MAZÓN, J. M. «Minimizing total variation flow». *Differential Integral Equations*, 14 (3) (2001), 321-360.
- [6] ANDREU, F.; CASELLES, V.; DÍAZ, J. I.; MAZÓN, J. M. «Some qualitative properties for the total variation flow». *J. Funct. Anal.*, 188 (2) (2002), 516-547.
- [7] ANDREU, F.; CASELLES, V.; MARTÍNEZ, J.; MAZÓN, J. M. «The essential spectrum of AM-compact operators». *Indag. Math. (N.S.)*, 2 (2) (1991), 149-158.
- [8] ANDREU-VAILLO, F.; CASELLES, V.; MAZÓN, J. M. «Existence and uniqueness of a solution for a parabolic quasilinear problem for linear growth functionals with  $L^1$  data». *Math. Ann.*, 322 (1) (2002), 139-206.
- [9] ANDREU, F.; CASELLES, V.; MAZÓN, J. M. «A parabolic quasilinear problem for linear growth functionals». *Rev. Mat. Iberoamericana*, 18 (1) (2002), 135-185.
- [10] ANDREU-VAILLO, F.; CASELLES, V.; MAZÓN, J. M. *Parabolic Quasilinear Equations Minimizing Linear Growth Functionals*. Basilea: Birkhäuser Verlag, 2004. (Progress in Mathematics; 223)
- [11] ANDREU, F.; CASELLES, V.; MAZÓN, J. M. «A strongly degenerate quasilinear equation: the elliptic case». *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 3 (3) (2004), 555-587.
- [12] ANDREU, F.; CASELLES, V.; MAZÓN, J. M. «The Cauchy problem for a strongly degenerate quasilinear equation». *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 7 (3) (2005), 361-393.

- [13] ANDREU, F.; CASELLES, V.; MAZÓN, J. M. «A strongly degenerate quasilinear equation: the parabolic case». *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 176 (3) (2005), 415-453.
- [14] ANDREU, F.; CASELLES, V.; MAZÓN, J. M. «Some regularity results on the 'relativistic' heat equation». *J. Differential Equations*, 245 (12) (2008), 3639-3663.
- [15] ANDREU, F.; CASELLES, V.; MAZÓN, J. M. «A Fisher-Kolmogorov equation with finite speed of propagation». *J. Differential Equations*, 248 (10) (2010), 2528-2561.
- [16] ANDREU, F.; CASELLES, V.; MAZÓN, J. M.; MOLL, S. «Finite propagation speed for limited flux diffusion equations». *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 182 (2) (2006), 269-297.
- [17] ANDREU, F.; CASELLES, V.; MAZÓN, J. M.; MOLL, S. «The Dirichlet problem associated to the relativistic heat equation». *Math. Ann.*, 347 (1) (2010), 135-199.
- [18] ANDREU, F.; CASELLES, V.; MAZÓN, J. M.; SOLER, J.; VERBENI, M. «Radially symmetric solutions of a tempered diffusion equation. A porous media, flux-limited case». *SIAM J. Math. Anal.*, 44 (2) (2012), 1019-1049.
- [19] ARÀNDIGA, F.; CASELLES, V. «Approximations of positive operators and continuity of the spectral radius». *J. Operator Theory*, 26 (1) (1991), 53-71.
- [20] ARÀNDIGA, F.; CASELLES, V. «Approximations of positive operators and continuity of the spectral radius II». *Math. Z.*, 209 (4) (1992), 547-558.
- [21] ARIAS, P.; CASELLES, V.; FACCILOLO, G. «Analysis of a variational framework for exemplar-based image inpainting». *Multiscale Model. Simul.*, 10 (2) (2012), 473-514.
- [22] ARIAS, P.; CASELLES, V.; SAPIRO, G. «A variational framework for non-local image inpainting». A: *Energy Minimization Methods in Computer Vision and Pattern Recognition*. Berlín; Heidelberg: Springer, 2009, 345-358. (Lecture Notes in Computer Science; 5681)
- [23] ARIAS, P.; FACCILOLO, G.; CASELLES, V.; SAPIRO, G. «A variational framework for exemplar-based image inpainting». *Int. J. Comput. Vis.*, 93 (3) (2011), 319-347.
- [24] BALLESTER, C.; BERTALMIO, M.; CASELLES, V.; SAPIRO, G.; VERDERA, J. «Filling-in by joint interpolation of vector fields and gray levels». *IEEE Trans. Image Process.*, 10 (8) (2001), 1200-1211.
- [25] BALLESTER, C.; CALDERERO, F.; CASELLES, V.; FACCILOLO, G. «Multiscale analysis of similarities between images on Riemannian manifolds». *Multiscale Model. Simul.*, 12 (2) (2014), 616-649.
- [26] BALLESTER, C.; CASELLES, V.; VERDERA, J. «A variational model for disocclusion». A: *Proceedings 2003 International Conference on Image Processing*. Vol. 2. Piscataway, NJ: IEEE Signal Processing Society, 2003, III-677-80.

- [27] BALLESTER, C.; CASELLES, V.; VERDERA, J. «Disocclusion by joint interpolation of vector fields and gray levels». *Multiscale Model. Simul.*, 2 (1) (2003), 80–123.
- [28] BALLESTER, C.; CASELLES, V.; VERDERA, J.; BERTALMIO, M.; SAPIRO, G. «A variational model for filling-in gray level and color images». A: *Proceedings Eighth IEEE International Conference on Computer Vision. ICCV 2001*. Vol. 1. Piscataway, NJ: IEEE Signal Processing Society, 2001, 10–16.
- [29] BELLETTINI, G.; CASELLES, V.; CHAMBOLLE, A.; NOVAGA, M. «Crystalline mean curvature flow of convex sets». *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 179 (1) (2006), 109–152.
- [30] BELLETTINI, G.; CASELLES, V.; CHAMBOLLE, A.; NOVAGA, M. «The volume preserving crystalline mean curvature flow of convex sets in  $\mathbb{R}^N$ ». *J. Math. Pures Appl. (9)*, 92 (5) (2009), 499–527.
- [31] BELLETTINI, G.; CASELLES, V.; NOVAGA, M. «The total variation flow in  $\mathbb{R}^n$ ». *Differential Equations*, 184 (2) (2002), 475–525.
- [32] BELLETTINI, G.; CASELLES, V.; NOVAGA, M. «Explicit solutions of the eigenvalue problem  $-\operatorname{div}\left(\frac{Du}{|Du|}\right) = u$  in  $\mathbb{R}^2$ ». *SIAM J. Math. Anal.*, 36 (4) (2005), 1095–1129.
- [33] BERNOT, M.; CASELLES, V.; MOREL, J.-M. *Optimal Transportation Networks. Models and Theory*. Berlín: Springer-Verlag, 2009. (Lecture Notes in Mathematics; 1955)
- [34] BERTALMÍO, M.; CASELLES, V.; PROVENZI, E. «Issues about Retinex theory and contrast enhancement». *Int. J. Comput. Vis.*, 83 (1) (2009), 101–119.
- [35] BERTALMÍO, M.; CASELLES, V.; PROVENZI, E.; RIZZI, A. «Perceptual color correction through variational techniques». *IEEE Trans. Image Process.*, 16 (4) (2007), 1058–1072.
- [36] BERTALMÍO, M.; SAPIRO, G.; CASELLES, V.; BALLESTER, C. «Image inpainting». A: *SIGGRAPH '00. Proceedings of the 27th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*. Nova York: ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co, 2000, 417–424.
- [37] BERTSCH, M.; DAL PASSO, R. «Hyperbolic phenomena in a strongly degenerate parabolic equation». *Arch. Rational Mech. Anal.*, 117 (4) (1992), 349–387.
- [38] BLAKE, A.; ZISSERMAN, A. *Visual Reconstruction*. Cambridge, MA: MIT Press, 1987. (MIT Press Series in Artificial Intelligence)
- [39] BLANC, PH. «On the regularity of the solutions of some degenerate parabolic equations». *Comm. Partial Differential Equations*, 18 (5–6) (1993), 821–846.
- [40] BRENIER, Y. «Extended Monge-Kantorovich theory». A: *Optimal Transportation and Applications*. Berlín: Springer, 2003, 91–121. (Lecture Notes in Math.; 1813)



- [41] BUADES, A.; COLL, B.; MOREL, J.-M. «A non-local algorithm for image denoising». A: *2005 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Vol. 2. Piscataway, NJ: IEEE Signal Processing Society, 2005, 60-65.
- [42] CALDERERO, F.; CASELLES, V. «Multiscale analysis for images on Riemannian manifolds». *SIAM J. Imaging Sci.*, 7 (2) (2014), 1108-1170.
- [43] CALVO, J.; CAMPOS, J.; CASELLES, V.; SÁNCHEZ, O.; SOLER, J. «Flux-saturated porous media equations and applications». *EMS Surv. Math. Sci.*, 2 (1) (2015), 131-218.
- [44] CALVO, J.; CAMPOS, J.; CASELLES, V.; SÁNCHEZ, O.; SOLER, J. «Pattern formation in a flux limited reaction-diffusion equation of porous media type». *Invent. Math.*, 206 (1) (2016), 57-108.
- [45] CALVO, J.; CAMPOS, J.; CASELLES, V.; SÁNCHEZ, Ó.; SOLER, J. «Qualitative behaviour for flux-saturated mechanisms: travelling waves, waiting time and smoothing effects». *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 19 (2) (2017), 441-472.
- [46] CALVO, J.; CASELLES, V. «Local-in-time regularity results for some flux-limited diffusion equations of porous media type». *Nonlinear Anal.*, 93 (2013), 236-272.
- [47] CAMPOS, J.; GUERRERO, P.; SÁNCHEZ, Ó.; SOLER, J. «On the analysis of traveling waves to a nonlinear flux limited reaction-diffusion equation». *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 30 (1) (2013), 141-155.
- [48] CARRILLO, J. A.; CASELLES, V.; MOLL, S. «On the relativistic heat equation in one space dimension». *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 107 (6) (2013), 1395-1423.
- [49] CASELLES, V. «A characterization of weakly sequentially complete Banach lattices». *Math. Z.*, 190 (3) (1985), 379-385.
- [50] CASELLES, V. «On irreducible operators on Banach lattices». *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.*, 48 (1) (1986), 11-16.
- [51] CASELLES, V. «On the peripheral spectrum of positive operators». *Israel J. Math.*, 58 (2) (1987), 144-160.
- [52] CASELLES, V. «Dunford-Pettis operators and the Radon-Nikodým property». *Arch. Math. (Basel)*, 50 (2) (1988), 183-188.
- [53] CASELLES, V. «A short proof of the equivalence of KMP and RNP in Banach lattices and preduals of von Neumann algebras». *Proc. Amer. Math. Soc.*, 102 (4) (1988), 973-974.
- [54] CASELLES, V. «An extension of Ando-Krieger's theorem to ordered Banach spaces». *Proc. Amer. Math. Soc.*, 103 (4) (1988), 1070-1072.
- [55] CASELLES, V. «A characterization of dual Banach lattices». *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.*, 51 (1) (1989), 35-47.
- [56] CASELLES, V. «Scalar conservation laws and Hamilton-Jacobi equations in one-space variable». *Nonlinear Anal.*, 18 (5) (1992), 461-469.

- [57] CASELLES, V. «Convergence of the 'relativistic' heat equation to the heat equation as  $c \rightarrow \infty$ ». *Publ. Mat.*, 51 (1) (2007), 121-142.
- [58] CASELLES, V. «On the entropy conditions for some flux limited diffusion equations». *J. Differential Equations*, 250 (8) (2011), 3311-3348.
- [59] CASELLES, V. «Flux limited generalized porous media diffusion equations». *Publ. Mat.*, 57 (1) (2013), 155-217.
- [60] CASELLES, V. «Convergence of flux-limited porous media diffusion equations to their classical counterpart». *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 14 (2) (2015), 481-505.
- [61] CASELLES, V.; CATTÉ, F.; COLL, T.; DIBOS, F. «A geometric model for active contours in image processing». *Numer. Math.*, 66 (1) (1993), 1-31.
- [62] CASELLES, V.; CHAMBOLLE, A.; NOVAGA, M. «Uniqueness of the Cheeger set of a convex body». *Pacific J. Math.*, 232 (1) (2007), 77-90.
- [63] CASELLES, V.; COLL, B.; MOREL, J.-M. «A Kanizsa programme». A: *Variational Methods for Discontinuous Structures*. Basilea: Birkhäuser, 1996, 35-55. (Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.; 25)
- [64] CASELLES, V.; HARO, G.; SAPIRO, G.; VERDERA, J. «On geometric variational models for inpainting surface holes». *Comput. Vis. Image Und.*, 111 (3) (2008), 351-373.
- [65] CASELLES, V.; IGUAL, L.; SANDER, O. «An axiomatic approach to scalar data interpolation on surfaces». *Numer. Math.*, 102 (3) (2006), 383-411.
- [66] CASELLES, V.; KIMMEL, R.; SAPIRO, G. «Geodesic active contours». *Int. J. Comput. Vis.*, 22 (1) (1997), 61-79.
- [67] CASELLES, V.; KIMMEL, R.; SAPIRO, G.; SBERT, C. «Minimal surfaces: a geometric three-dimensional segmentation approach». *Numer. Math.*, 77 (4) (1997), 423-451.
- [68] CASELLES, V.; KIMMEL, R.; SAPIRO, G.; SBERT, C. «Minimal surfaces based object segmentation». *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 19 (4) (1997), 394-398.
- [69] CASELLES, V.; KLAIANY, C. «Existence, uniqueness and regularity for Kruzkov's solutions of the Burger-Carleman's system». *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (5)*, 10 (1) (1989), 93-104.
- [70] CASELLES, V.; MIRANDA, M., JR.; NOVAGA, M. «Total variation and Cheeger sets in Gauss space». *J. Funct. Anal.*, 259 (6) (2010), 1491-1516.
- [71] CASELLES, V.; MONASSE, P. *Geometric Description of Images as Topographic Maps*. Berlín: Springer-Verlag, 2010. (Lecture Notes in Mathematics; 1984)
- [72] CASELLES, V.; MOREL, J.-M.; SBERT, C. «An axiomatic approach to image interpolation». *IEEE Trans. Image Process.*, 7 (3) (1998), 376-386.
- [73] CRANDALL, M. G.; ISHII, H.; LIONS, P.-L. «User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations». *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 27 (1) (1992), 1-67.

- [74] DAL PASSO, R. «Uniqueness of the entropy solution of a strongly degenerate parabolic equation». *Comm. Partial Differential Equations*, 18 (1-2) (1993), 265-279.
- [75] DEMANET, L.; SONG, B.; CHAN, T. «Image inpainting by correspondence maps: a deterministic approach». *UCLA CAM Report*, 03-40 (2003), 1-17.
- [76] DUBROVIN, B. A.; FOMENKO, A. T.; NOVIKOV, S. P. *Modern Geometry- Methods and Applications. Part I. The Geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields*. Nova York: Springer-Verlag, 1984. (Graduate Texts in Mathematics; 93). [Traduït del rus per Robert G. Burns]
- [77] EFROS, A. A.; LEUNG, T. K. «Texture synthesis by non-parametric sampling». A: *Proceedings of the Seventh IEEE International Conference on Computer Vision*. Vol. 2. Piscataway, NJ: IEEE Signal Processing Society, 1999, 1033-1038.
- [78] FACCILOLO, G.; ARIAS, P.; CASELLES, P.; SAPIRO, G. «Exemplar-based interpolation of sparsely sampled images». A: *EMMCVPR '09. Proceedings of the 7th International Conference on Energy Minimization Methods in Computer Vision and Pattern Recognition*. Berlín; Heidelberg: Springer-Verlag, 2009, 331-344. (Lecture Notes in Computer Science; 5681)
- [79] FEDOROV, V.; ARIAS, P.; FACCILOLO, G.; BALLESTER, C. «Affine invariant self-similarity for exemplar-based inpainting». A: *Proceedings of the 11th Joint Conference on Computer Vision, Imaging and Computer Graphics Theory and Applications*. Vol. 3. Setúbal, Portugal: Science and Technology Publications, Lda, 2016, 48-58.
- [80] FEDOROV, V.; ARIAS, P.; SADEK, R.; FACCILOLO, G.; BALLESTER, C. «Linear multiscale analysis of similarities between images on Riemannian manifolds: practical formula and affine covariant metrics». *SIAM J. Imaging Sci.*, 8 (3) (2015), 2021-2069.
- [81] FERRADANS, S.; PALMA-AMESTOY, R.; PROVENZI, E. «An algorithmic analysis of variational models for perceptual local contrast enhancement». *IPOJ. Image Process. Online*, 5 (2015), 219-233.
- [82] GILBOA, G.; OSHER, S. «Nonlocal linear image regularization and supervised segmentation». *Multiscale Model. Simul.*, 6 (2) (2007), 595-630.
- [83] GONZALEZ, R. C.; WOODS, R. E. *Digital Image Processing*. 2a ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002.
- [84] GRONCHI, G.; PROVENZI, E. «A variational model for context-driven effects in perception and cognition». *J. Math. Psych.*, 77 (2017), 124-141.
- [85] KASS, M.; WITKIN, A.; TERZOPOULOS, D. «Snakes: Active contour models». *Int. J. Comput. Vis.*, 1 (4) (1988), 321-331.
- [86] KAWAI, N.; SATO, T.; YOKOYA, N. «Image inpainting considering brightness change and spatial locality of textures and its evaluation». A: *Proceedings PSIVT 2009: Advances in Image and Video Technology*. Berlín; Heidelberg: Springer, 2009, 271-282. (Lecture Notes in Computer Science; 5414)

- [87] LAND, E. H.; MCCANN, J. J. «Lightness and Retinex theory». *J. Opt. Soc. Amer.*, 61 (1) (1971), 1-11.
- [88] MALLADI, R.; SETHIAN, J. A.; VEMURI, B. C. «Evolutionary fronts for topology-independent shape modeling and recovery». A: *Computer Vision - ECCV '94*. Berlín; Heidelberg: Springer, 1994, 1-13. (Lecture Notes in Computer Science; 800)
- [89] MALLADI, R.; SETHIAN, J. A.; VEMURI, B. C. «Shape modeling with front propagation: a level set approach». *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 17 (2) (1995), 158-175.
- [90] MASNOU, S.; MOREL, J.-M. «Level lines based disocclusion». A: *Proceedings 1998 International Conference on Image Processing. ICIP98*. Vol. 3. Piscataway, NJ: IEEE Signal Processing Society, 1998, 259-263.
- [91] MIHALAS, D.; MIHALAS, B. W. *Foundations of Radiation Hydrodynamics*. Nova York: Oxford University Press, 1984.
- [92] OSHER, S. J.; SETHIAN, J. A. «Fronts propagation with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations». *J. Comput. Phys.*, 79 (1988), 12-49.
- [93] PALMA-AMESTOY, R.; PROVENZI, E.; BERTALMÍO, M.; CASELLES, V. «A perceptually inspired variational framework for color enhancement». *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 31 (3) (2009), 458-474.
- [94] PROVENZI, E.; CASELLES, V. «A wavelet perspective on variational perceptually-inspired color enhancement». *Int. J. Comput. Vis.*, 106 (2) (2014), 153-171.
- [95] PROVENZI, E.; DE CARLI, L.; RIZZI, A.; MARINI, D. «Mathematical definition and analysis of the Retinex algorithm». *J. Opt. Soc. Amer. A*, 22 (12) (2005), 2613-2621.
- [96] RIZZI, A.; GATTA, C.; MARINI, D. «A new algorithm for unsupervised global and local color correction». *Pattern Recognition Lett.*, 24 (11) (2003), 1663-1677.
- [97] ROSENAU, P. «Tempered diffusion: A transport process with propagating front and inertial delay». *Phys. Rev. A*, 46 (1992), 7371-7374.
- [98] RUDIN, L. I.; OSHER, S.; FATEMI, E. «Nonlinear total variation based noise removal algorithms». *Phys. D*, 60 (1-4) (1992), 259-268.
- [99] SANDER, O.; CASELLES, V.; BERTALMIO, M. «Axiomatic scalar data interpolation on manifolds». A: *Proceedings 2003 International Conference on Image Processing*. Vol. 2. Piscataway, NJ: IEEE Signal Processing Society, 2003, III-681-4.
- [100] SAPIRO, G.; CASELLES, V. «Histogram modification via differential equations». *J. Differential Equations*, 135 (2) (1997), 238-268.
- [101] SETHIAN, J. A. «Numerical algorithms for propagating interfaces: Hamilton-Jacobi equations and conservation laws». *J. Differential Geom.*, 31 (1) (1990), 131-161.

- [102] TERZOPOULOS, D.; WITKIN, A.; KASS, M. «Constraints on deformable models: Recovering 3d shape and nonrigid motion». *Artificial Intelligence*, 36 (1) (1988), 91-123.
- [103] VERDERA, J.; CASELLES, V.; BERTALMIO, M.; SAPIRO, G. «Inpainting surface holes». A: *Proceedings 2003 International Conference on Image Processing*. Vol. 3. Piscataway, NJ: IEEE Signal Processing Society, 2003, II-903-6.
- [104] WEXLER, Y.; SHECHTMAN, E.; IRANI, M. «Space-time completion of video». *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 29 (3) (2007), 463-476.

P. ARIAS  
CMLA  
UNIVERSITÉ PARIS SACLAY  
FRANCE  
pablo.arias@cmla.ens-cachan.fr

C. BALLESTER  
DEPT. DE TECNOLOGIES DE LA INFORMACIÓ I LES COMUNICACIONS  
UNIVERSITAT POMPEU FABRA  
BARCELONA, SPAIN  
coloma.ballester@upf.edu

B. COLL  
DEPT. DE MATEMÀTIQUES I INFORMÀTICA  
UNIVERSITAT DE LES ILLES BALEARS  
ESCOLA POLITÈCNICA SUPERIOR  
07122 PALMA, SPAIN  
tomeu.coll@uib.cat

J. M. MAZÓN  
DEPT. D'ANÀLISI MATEMÀTICA  
UNIVERSITAT DE VALÈNCIA  
46100 BURJASSOT, SPAIN  
Jose.M.Mazon@uv.es

E. PROVENZI  
IMB INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE BORDEAUX  
UNIVERSITÉ BORDEAUX, UMR 5251  
FRANCE  
edoardo.provenzi@u-bordeaux.fr